



X 射线的辐射机制

刘碧芳

中国科学院国家天文台

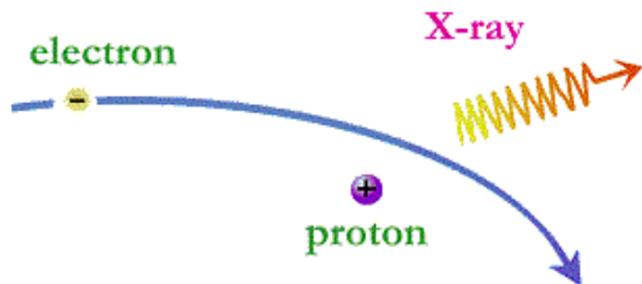
一、电磁辐射的起源

- 经典电磁理论：麦克斯韦方程组
 - 预言电磁波的存在
 - 电荷、电流产电磁场：固有场+辐射场
 - 加速运动的电荷产生辐射场。非相对论条件下
 - 辐射能流由坡印廷矢量表示
 - 辐射功率与角分布由Larmor公式求出
 - 辐射光谱通过傅里叶变化得到
 - 相对论电荷的辐射场则由非相对论结果通过洛伦兹变换导出
- 量子理论：量子态跃迁

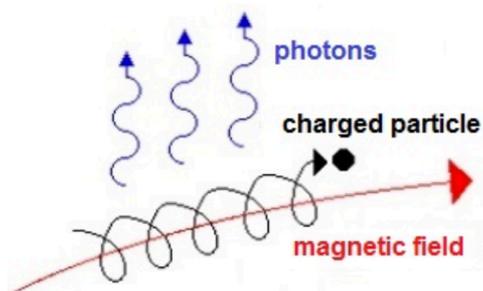
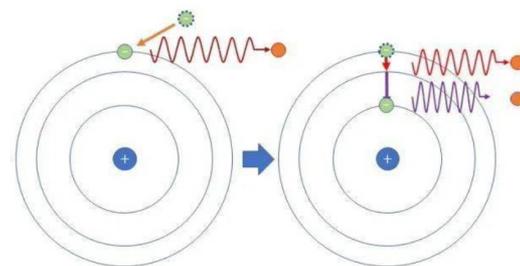
二、天体物理中的主要辐射过程

- ✧ 轫致辐射、黑体辐射
- ✧ 回旋辐射、同步辐射
- ✧ 逆康普顿散射、（同步）自康普顿辐射、康普顿硬化
- ✧ 复合辐射+复合线

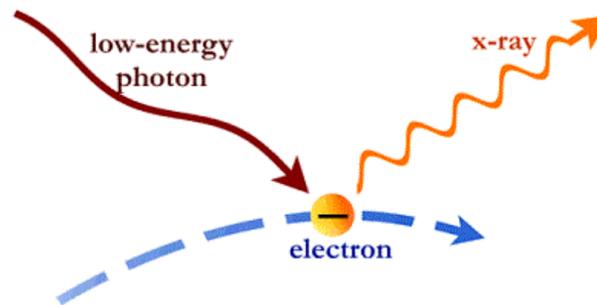
轫致辐射+复合辐射：电子与离子作用



Bremsstrahlung. Image credit: Chandra.



Synchrotron radiation. Image credit: Modified from *Introduction to Radio Astronomy*.



Inverse Compton scattering. Image credit: Chandra.

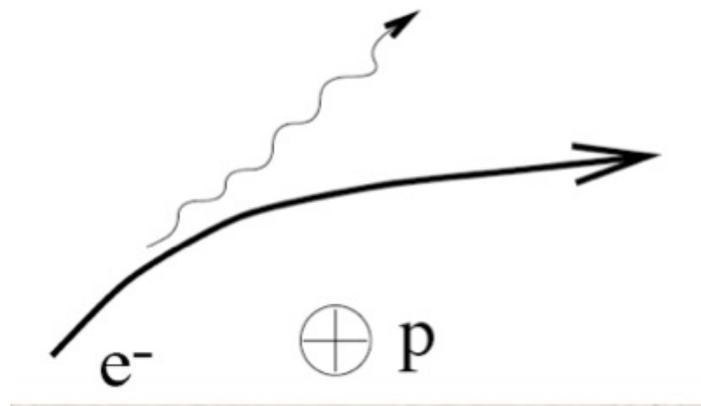
同步辐射：电子与**磁场**作用

逆康普顿散射：电子与**光子**作用

1、轫致辐射、黑体辐射

轫致辐射 (Bremsstrahlung) : 带电粒子之间的近距离碰撞引起的辐射, 通常指电子与离子间的库伦碰撞使电子加速运动产生的辐射。

轫致辐射比较重要的天体:
太阳耀斑, HII regions,
clusters of galaxies, accreting
white dwarfs...



电子系的轫致辐射

- 轫致辐射是无磁场的热等离子体中主要的辐射机制。若无能量补充，轫致辐射使热等离子体逐渐冷却。
- 轫致辐射原则上需要用量子力学来处理，亦用经典的偶极近似分析。
- 速度为 v 的电子系的轫致辐射谱功率为（量子力学结果）

$$\frac{dW}{d\omega dV dt} = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}c^3 m^2 v} n_e n_i Z^2 g_{ff}(v, \omega)$$

冈特因子(Gaunt factor) $g_{ff}(v, \omega)$ 是电子能量和辐射频率的函数， n_e 、 n_i ：电子与离子的数密度， Z ：离子的净电荷数，

热平衡系统的韧致辐射

电子遵循麦克斯韦速率分布, $f(v) = \frac{4v^2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$
所有电子的辐射之和需对速率积分, 积分下限 $v_{\min} = \left(\frac{2hv}{m} \right)^{1/2}$
(电子无法产生大于自身能量的光子)

⇒ a) 热平衡系统的韧致辐射的谱发射率

$$\begin{aligned} \epsilon_v^{ff} &= \frac{dW}{dV dt dv} = \frac{2^5 \pi e^6}{3mc^2} \left(\frac{2\pi}{3km} \right)^{-1/2} T^{-1/2} n_e n_i Z^2 e^{-hv/kT} \bar{g}_{ff} \\ &= 6.8 \times 10^{-38} Z^2 n_e n_i T^{-1/2} e^{-hv/kT} \bar{g}_{ff} \end{aligned}$$

其中速度平均的冈特因子, $1 < \bar{g}_{ff} < 5$ for $10^{-4} < \frac{hv}{kT} < 1$
在 $hv \approx kT$ 时, $\bar{g}_{ff}(v, T) \approx 1$

b) 轫致辐射的总功率（对所有辐射频率积分）

$$\varepsilon^{ff} = \frac{dW}{dt dV} = \left(\frac{2\pi kT}{3m} \right)^{1/2} \frac{2^5 \pi e^6}{3hmc^3} Z^2 n_e n_i \bar{g}_B$$

$$\longrightarrow \boxed{\varepsilon^{ff} = 1.4 \times 10^{-27} Z^2 n_e n_i T^{1/2} \bar{g}_B}$$

$\bar{g}_B(T)$ is in the range 1.1 to 1.5.

对一般宇宙等离子体，氢~90%，氦~9%，其它~1%，
氢和氦完全电离条件下，式中 $\sum n_z n_e Z^2 \approx 1.4 n_e^2$
给定电子数密度与温度即可求轫致辐射谱与总功率

c) 热平衡系统的自由-自由吸收

热平衡气体，由Kirchhoff定律， $S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu$

利用发射系数 $j_\nu = \epsilon_\nu / 4\pi$

$$j_\nu^{ff} = 5.4 \times 10^{-39} Z^2 n_e n_i T^{-1/2} e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{ff}$$

得到

$$\alpha_\nu^{ff} = 3.7 \times 10^8 \frac{Z^2 n_e n_i}{T^{1/2}} \frac{1 - e^{-h\nu/kT}}{\nu^3} \bar{g}_{ff}$$

相应的罗斯兰平均吸收系数 α_R

$$\frac{1}{\alpha_R} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu^{ff}} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \longrightarrow \alpha_R^{ff} = 1.7 \times 10^{-25} T^{-7/2} Z^2 n_e n_i \bar{g}_R$$

其中 $\bar{g}_R \sim 1$

d) 热平衡系统的韧致辐射出射谱

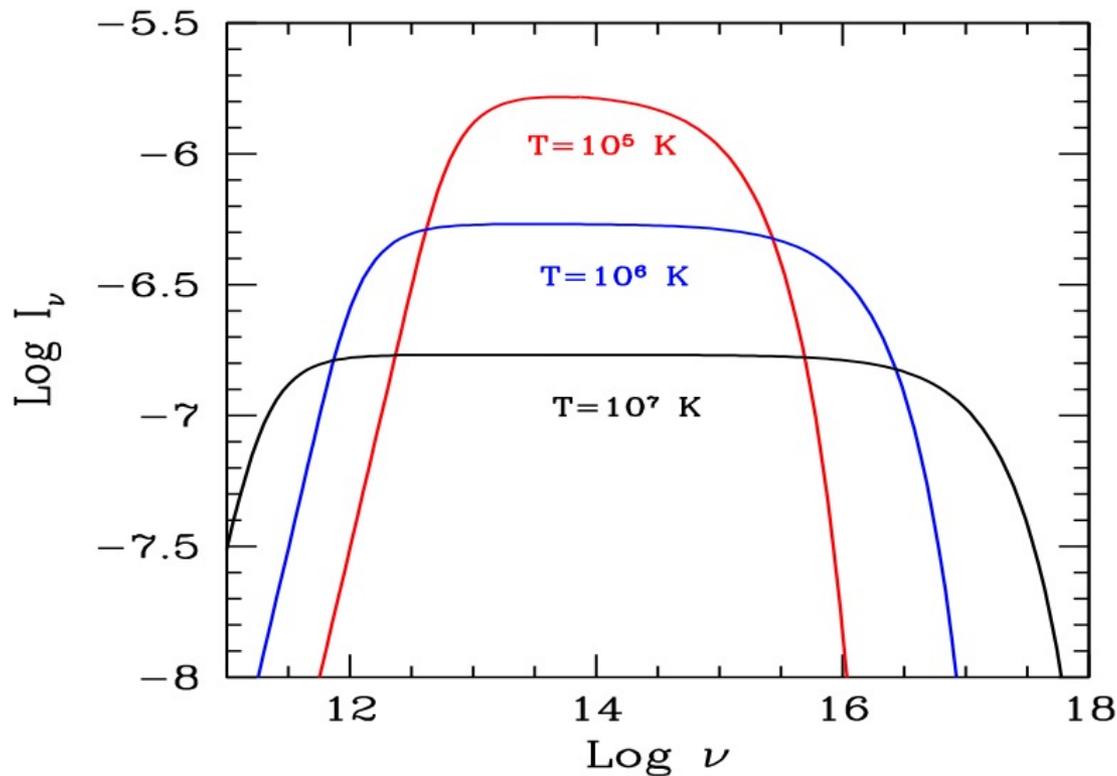
发射与吸收共存，辐射转移方程的解

$$I_{\nu}(\tau_{\nu}) = I_{\nu,0} e^{-\tau_{\nu}} + \int_0^{\tau_{\nu}} e^{-(\tau_{\nu}-\tau'_{\nu})} S_{\nu}(\tau'_{\nu}) d\tau'_{\nu}$$

热平衡、温度均匀系统， $S_{\nu}=B_{\nu}(T)$

$$I_{\nu}(\tau_{\nu}) = B_{\nu}(1 - e^{-\tau_{\nu}}) \quad \text{其中 } \tau_{\nu} = \alpha_{\nu}R$$

给定温度 T ， R ， n_i ， n_e ， Z 的系统， B_{ν} 和 α_{ν} 及光深就给定，辐射 I_{ν} 谱就可由上式计算。



轫致辐射谱，其中 $R = 10^{15} \text{ cm}$, 电子、 $n_e = n_p = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ 、 $T = 10^5 \text{ K}$ 、 10^6 K 、 10^7 K , 冈特因子取值为1

特征:

- ✧ 低频段自吸收: 黑体; 高频端截断($h\nu > kT$): 维恩谱
- 主导辐射谱: 光学薄平谱
- ✧ 温度越高, 谱越宽, 单色辐射强度越小 ($I \propto T^{-1/2}$)、但总辐射功率越大 ($I \propto T^{1/2}$)。

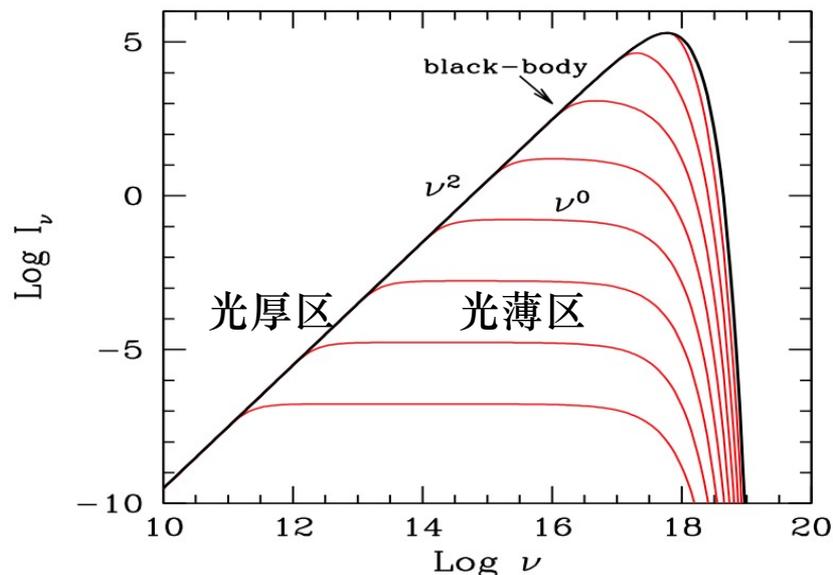
e) 从韧致辐射到黑体辐射

给定温度和尺度，粒子密度增大，韧致辐射可在全波段光厚 \Rightarrow 黑体谱

$$I_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad \longrightarrow$$

$$I_\nu \simeq B_\nu(T) \tau_\nu \quad (\tau \ll 1)$$

$$I_\nu \simeq B_\nu(T) \quad (\tau_\nu \gg 1)$$



光深决定了辐射谱强度与谱形

尺度 $R = 10^{15}$ cm, 电子温度 $T = 10^7$ K、
数密度从 $n_e = n_p = 10^{10} \text{cm}^{-3}$ (底部) 增大到 10^{18}cm^{-3} (顶部) 的等离子体的韧致辐射谱。假设 Gaunt 因子为 1.

f) 相对论电子的轫致辐射

对于相对论电子($v \rightarrow c$), 需要用量子电动力学理论来处理。

热电子的轫致辐射总功率(erg/s/cm³)的近似为

$$\frac{dW}{dVdt} = 1.4 \times 10^{-27} T^{1/2} n_e n_i Z^2 \bar{g}_B(T) (1 + 4.4 \times 10^{-10} T)$$

相比于非相对论电子, 相对论改正因子为

$$(1 + 4.4 \times 10^{-10} T)$$

显然, 只有温度高至 $\sim 10^9$ K时相对论改正才显著。

2、回旋辐射、同步辐射

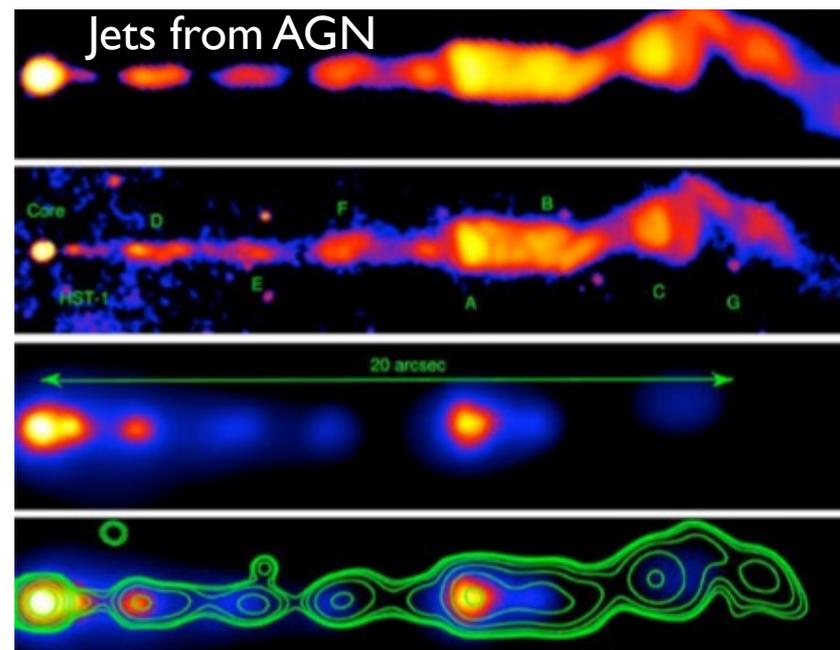
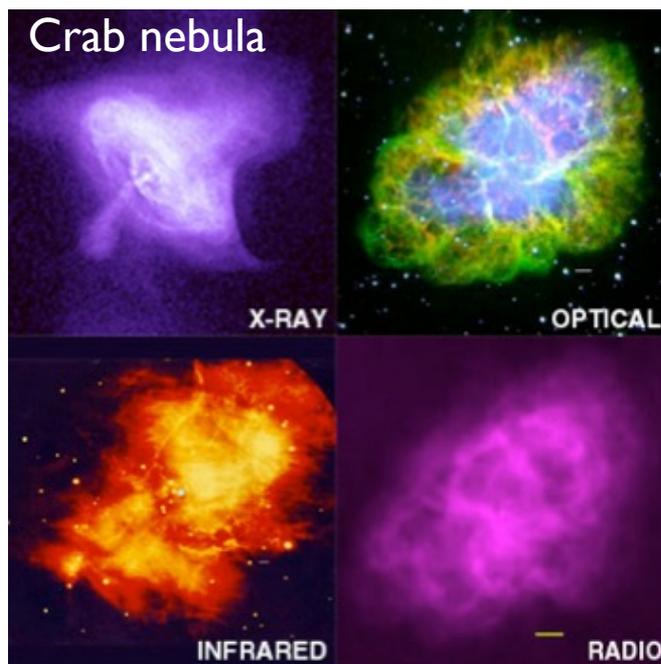
带电粒子在**磁场中受洛伦兹力加速**运动所产生的辐射

- 非相对论电子产生的辐射叫回旋辐射(Cyclotron radiation)
- 相对论电子产生的辐射叫同步辐射 (Synchrotron radiation)



电子速度的差异使回旋辐射与同步辐射谱截然不同

同步辐射在发现Crab nebula的辐射有偏振后 开始在天体中广泛应用



电子在磁场中如何运动?

由相对论、非相对论普适方程决定

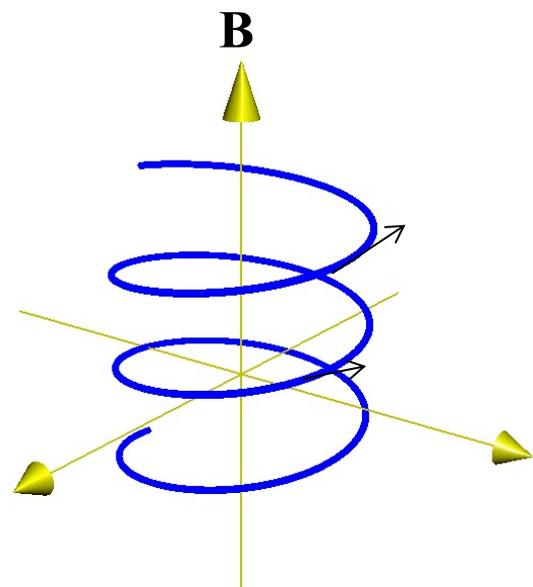
$$\frac{d}{dt} \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \frac{e}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{E}c + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{pmatrix}$$



电子运动特征：螺旋运动，轨道在垂直于磁场方向的投影为圆周运动，平行于磁场方向匀速运动，加速度始终垂直于速度。

螺旋频率 $\omega_B = \frac{eB}{\gamma mc}$

加速度 $a_{\perp} = \frac{q}{\gamma mc} vB \sin \alpha$



回旋、同步辐射的总功率

经典辐射功率Larmor公式推广到适用于相对论电子的普适形式:

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^4 (a_{\perp}^2 + \gamma^2 a_{\parallel}^2)$$

加速度有平行和垂直于速度 \mathbf{v} 的两个分量

对于磁场中的运动电子 $a_{\parallel} = 0$ $a_{\perp} = \frac{q}{\gamma mc} v B \sin \alpha$

速度为 β 、投射角为 α 的电子在磁场 B 中螺旋运动的辐射功率:

$$P = \frac{2}{3} r_0^2 c \beta^2 \gamma^2 B^2 \sin^2 \alpha = 1.6 \times 10^{-15} \beta^2 \gamma^2 B^2 \sin^2 \alpha (\text{erg/s})$$

准各向同性速度分布的电子系，对投射角求平均可得单电子的平均辐射功率：

$$\langle P \rangle = \left(\frac{2}{3} \right)^2 r_0^2 c \beta^2 \gamma^2 B^2 = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

其中电子经典半径 $r_0 = e^2/mc^2$ ，汤姆逊散射截面 $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$ ，
磁场能量密度 $U_B = B^2/8\pi$ 。

特征：电子在磁场中加速运动的辐射功率与 $\gamma^2 \beta^2$ 成正比，
与磁场能量密度 ($\propto B^2$) 成正比。

✧ 非相对论情况下，洛伦兹因子 $\gamma \simeq 1$ ， $\beta \ll 1$

✧ 相对论情况下， $\gamma \gg 1$ ， $\beta \sim 1$ ，辐射功率 ($\propto \beta^2 \gamma^2$) 大大增强。

相对论电子的同步辐射功率远大于回旋辐射功率，是天体物理中最重要的辐射机制之一

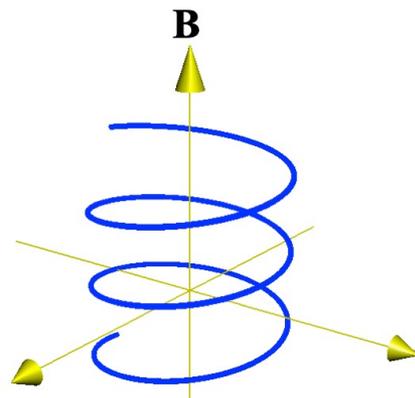
同步辐射/回旋辐射的特征量

Larmor频率 $\omega_L = eB / mc = 1.8 \times 10^7 B / \text{s}$

$$\nu_L = \frac{eB}{2\pi mc}$$

回旋频率 $\omega_B = \frac{eB}{\gamma mc} = \frac{1}{\gamma} \omega_L$ $\nu_B = \frac{eB}{2\pi \gamma mc}$

回旋半径 $R = \frac{\gamma m v c}{eB \sin \alpha} = \frac{v}{\omega_B \sin \alpha}$



单电子的同步/回旋辐射功率:

$$P = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \beta^2 \gamma^2 B^2 \sin^2 \alpha = 1.6 \times 10^{-15} \beta^2 \gamma^2 B^2 \sin^2 \alpha (\text{erg/s})$$

各向同性分布的电子，方向平均的辐射功率:

$$\langle P \rangle = \left(\frac{2}{3} \right)^2 r_0^2 c \beta^2 \gamma^2 B^2 = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

此形式可以用来比较康普顿硬化功率

其中电子经典半径 $r_0 = e^2 / mc^2$ ，汤姆逊散射截面 $\sigma_T = 8\pi r_0^2 / 3$ ，磁场能量密度 $U_B = B^2 / 8\pi$ 。

电子的同步辐射冷却时标/辐射寿命

各向同性速度分布的电子的平均冷却时标:

$$t_{syn} = E / \langle P \rangle = \gamma mc^2 / \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B$$
$$\sim \frac{7.75 \times 10^8}{B^2 \gamma} s = \frac{24.57}{B^2 \gamma} yr \sim 0.75 s \left(\frac{B}{10^3} \right)^{-2} \left(\frac{\gamma}{10^3} \right)^{-1}$$

一般AGN环境中, 若 $B = 10^3 \text{G}$, $\gamma = 10^3$, 则 $t_{syn} = 0.75 \text{ s}$.
同样速度的电子, 在射电噪类星体的射电瓣中, $B = 10^{-5} \text{G}$, 辐射冷却时标为 $t_{syn} = 2.46 \text{ 亿年}$

强磁场中的同步辐射很重要, 但电子辐射寿命太短。如果没有大量持续不断的相对论电子(或能量)补充, 同步辐射的重要性会变小。

天体中的一些同步辐射源，年龄比电子寿命长很多
由此推算源中存在某种连续产生高能电子的机制，
使辐射得以维持。

如：蟹状星云($B \sim 10^{-4}G$)，产生
X射线辐射 ($\sim 10^{18}Hz$)的相对论
电子的辐射寿命 ~ 20 年。

而Crab Nebula 年龄 ~ 1000 年，
由此推断源中有使电子能量增
大到 10^8MeV 的连续加速机制---
中子星！



相对论电子在强磁场中的辐射能量，在一个轨道周期内可能接近电子自身的能量，这时辐射损耗不可忽略，电子的运动轨道需要修正，前述忽略辐射场的作用所求得的辐射功率不再成立。磁场与电子能量 γ 需满足

$$\langle P \rangle \cdot T \ll \gamma mc^2 \longrightarrow B \ll \frac{e / \sigma_T}{\gamma^2 \sin^2 \alpha} \sim \frac{7.22 \times 10^{14}}{\gamma^2 \sin^2 \alpha} \text{Guass}$$

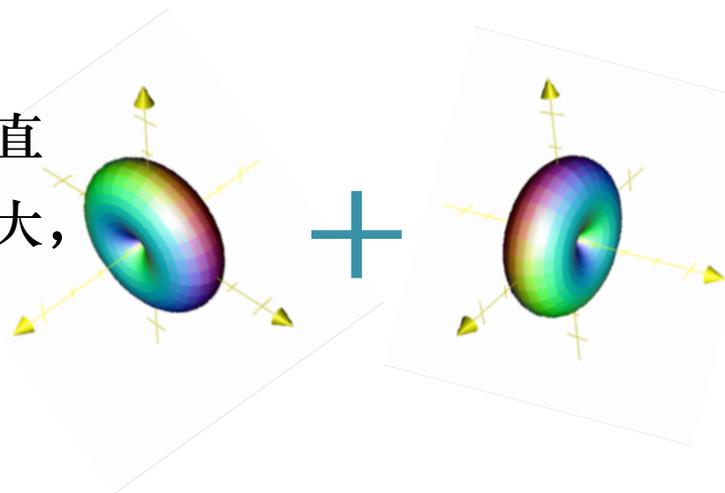
平均来说，前述同步辐射结果成立的条件为

$$10^{-15} B \gamma^2 \ll 1$$

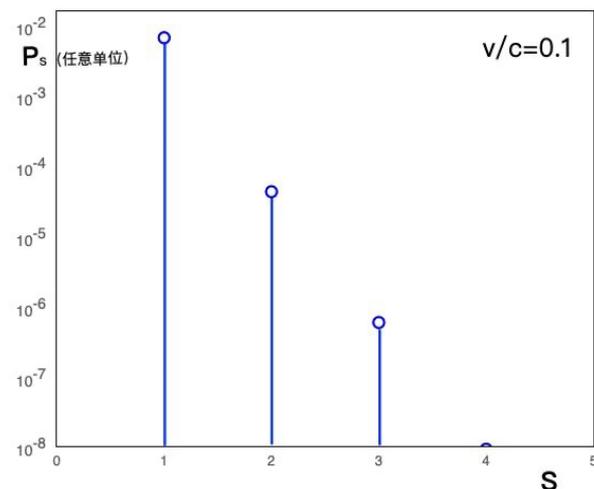
对辐射频率显著小于 $2 \times 10^{21} \text{Hz}$ (即 10MeV)的相对论电子，以上不等式总是满足的。

回旋辐射分布与谱分布:

角分布: 低速圆周运动可看作互相垂直的二维偶极子, 辐射在磁场方向最强大, 但方向性不强。

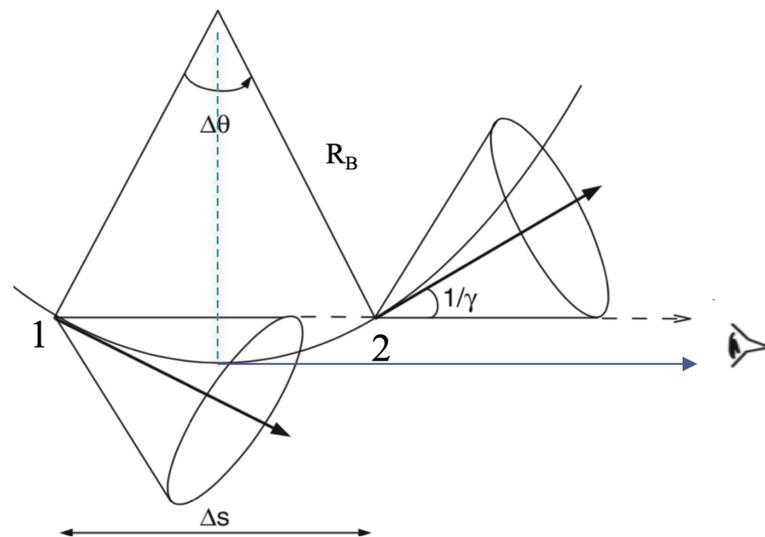


辐射谱: 低速周期性运动电子的辐射谱为单色/准单色谱, 其**辐射频率就是电子作圆周运动的频率**。随着当速度增大, 辐射谱由一系列分立**谱线**组成, 能量**几乎全部集中于基频辐射中**, 谐波 $P_{s+1}/P_s \sim \beta^2 \ll 1$, 当 $\beta \ll 1$ 时, 只有基频。



同步辐射的角分布

相对论电子辐射的方向性极强，螺旋运动电子的同步辐射只在沿速度方向很小的角度范围内 ($\Delta\theta$)



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a_{\perp}^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \beta \cos\theta)^4} \left[1 - \frac{\sin^2\theta \cos^2\phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos\theta)^2} \right]$$

θ : 观测方向与速度的夹角

任意给定方向的观测者看到的辐射角分布随时间变化，只有在电子的速度刚好指向该方向的前后极短时间内辐射不为零，在每一个螺旋周期内出现一次。

粒子在一个螺旋周期内的辐射分布：

相对论电子的辐射主要集中在以运动方向为中心的 $\Delta\theta = 1/\gamma$ 的圆周内，磁场中电子的速度始终与磁场成 α 角，因此，辐射被限制在与B成 α 角的圆锥壳层内，壳层与磁场夹角从 $\alpha - 1/\gamma$ 到 $\alpha + 1/\gamma$ 。

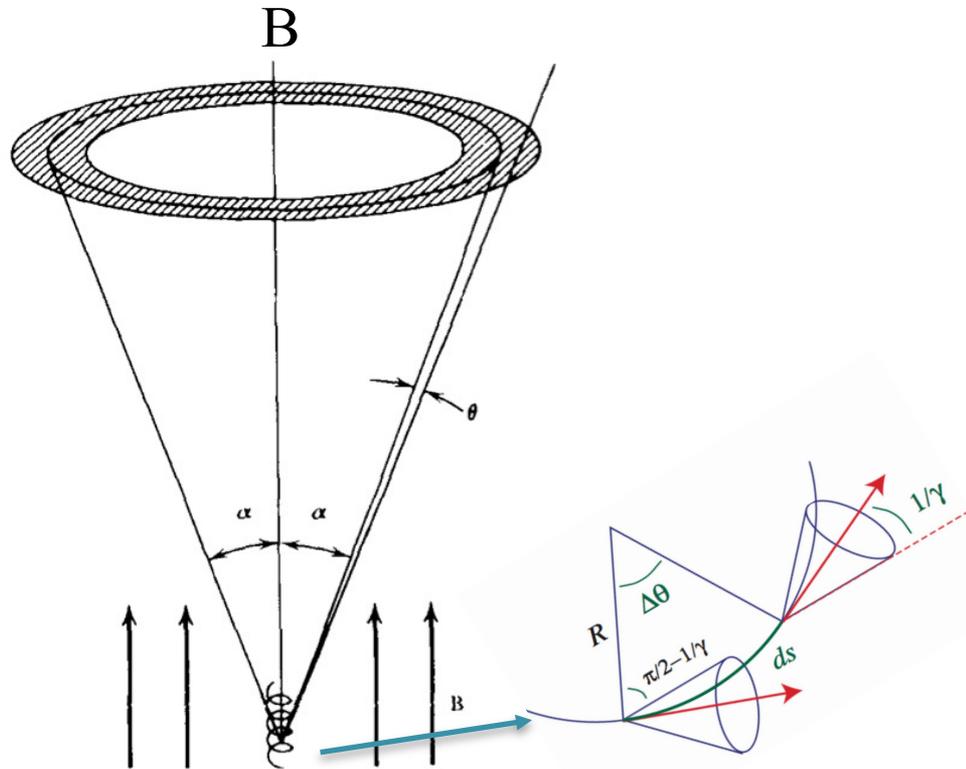


Figure 6.5 Synchrotron emission from a particle with pitch angle α . Radiation is confined to the shaded solid angle.

同步辐射谱

电子在磁场中的运动方程+相对论电子的辐射谱公式
⇒相对论电子的同步辐射谱，为modified Bessel 函数

$$P_{\perp}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc^2} [F(x) + G(x)]$$

垂直于磁场和速度构成的平面的电矢量分量贡献

$$P_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{4\pi mc^2} [F(x) - G(x)]$$

在上述平面内且与B夹角为 $90-\alpha$ 的电矢量分量贡献

总辐射谱功率：

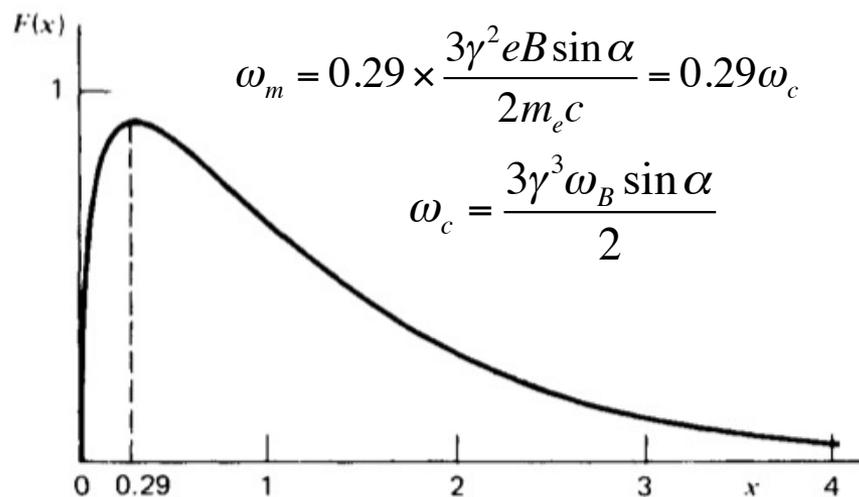
$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc^2} F(x)$$

辐射谱分布形状由F(x)决定

$$F(x) \equiv x \int_x^{\infty} K_{5/3}(y) dy, \quad G(x) = xK_{2/3}(x), \quad x = \omega / \omega_c$$

表示频率 ν 的函数

$$P(\nu, \gamma, \alpha) = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \alpha}{mc^2} F(\nu / \nu_c)$$



谱分布的渐近形式

$$F(x) \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3} \Gamma(\frac{1}{3})} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}, \quad x \ll 1,$$

$$F(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x} x^{1/2}, \quad x \gg 1.$$

单个电子的同步辐射谱特征：

- ✧ 在低频端，函数以 $\sim \nu^{1/3}$ 形式缓慢上升，在 $\nu = 0.29\nu_c$ 处达到峰值，在分析多电子对能谱的贡献是可近似认为单色
- ✧ 在高频端，以指数形式很陡地下降。 ν_c 意味着辐射的临界频率，比 ν_c 更高的频率的辐射极弱，实际上辐射截止于 ν_c 。 $\nu_c = \frac{3\gamma^2 eB \sin \alpha}{4\pi m c}$
- ✧ 特征频率

$$\nu_s = \gamma^3 \nu_B = \gamma^2 \frac{eB}{2\pi m c} = \gamma^2 \nu_L$$

从回旋辐射到同步辐射：频率的变化

✧ Larmor频率, Gyration frequency

$$\omega_L = \frac{eB}{mc} \quad \omega_B = \frac{eB}{\gamma mc} \quad \leftarrow \text{同步辐射基频, 随}\gamma\text{增大而减小}$$

✧ Critical frequency

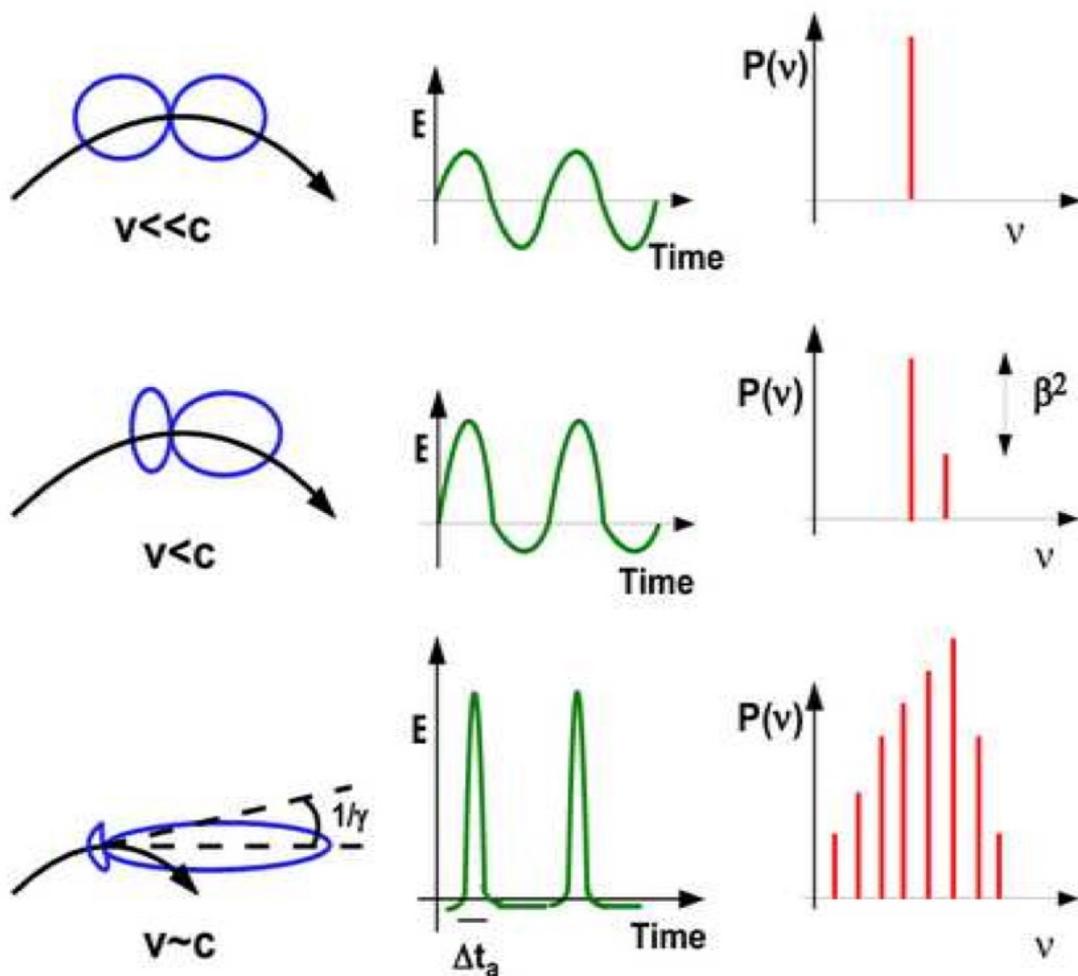
$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma^3 \omega_B \sin \alpha = \frac{3}{2} \gamma^2 \omega_L \sin \alpha \equiv \frac{3}{2} \omega_s \sin \alpha$$

✧ Maximal frequency of the radiation

$$\omega_m = 0.29 \omega_c = 0.29 \times \frac{3\gamma^2 eB \sin \alpha}{2mc}$$

所以, 随着粒子速度的增大, peak辐射的频率增大。由于谐波的出现、基频减小, 同步辐射的谱趋近连续谱

从回旋辐射到同步辐射：辐射谱的变化



电场随时间变化为三角函数；谱在 ω_B 处近似 δ 函数--谱线

电场变成周期性尖锐脉冲；谱由 ω_B 及其整数倍频率处的谱线组成；非相对论电子，谐波强度 $P_{s+1}/P_s \sim \beta^2 \ll 1$

极端相对论情况下， $\omega_B = eB / \gamma mc$ 很小， $\omega_c \gg \omega_B$ ，在 ω_B 及其谐波处的近似 δ 函数间隔很小，谱变成了连续谱

幂律分布电子系的同步辐射谱

假设电子的数密度在能量 $\gamma \rightarrow \gamma+d\gamma$ 的分布为

$$N(\gamma) = C\gamma^{-p} \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$$

已知能量为 γ 的电子在磁场中螺旋运动的辐射谱功率

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin \alpha}{2\pi mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

单位体积的辐射功率谱为所有电子的辐射的总和

$$P_{tot}(\omega) = \frac{\sqrt{3}q^3 CB \sin \alpha}{2\pi mc^2 (p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{mc\omega}{3qB \sin \alpha}\right)^{-(p-1)/2}$$

幂律分布的电子产生的同步辐射谱是幂律谱，谱指数是由电子幂律谱指数决定，幂律谱的频率范围可用单电子准单色辐射频率与电子能谱的上下限来粗略估算

幂律谱的条件是电子的能谱分布足够宽；
当电子能谱分布在有限范围时，只在 $\omega_1 < \omega < \omega_2$ 的频率范围内才为幂律谱。频率范围可用单电子准单色辐射频率与电子能谱的上下限来粗略估算，即

$$\omega_1 \approx 0.29 \times \frac{3\gamma_1^2 eB \sin \alpha}{2mc}$$
$$\omega_2 \approx 0.29 \times \frac{3\gamma_2^2 eB \sin \alpha}{2mc}$$

对各向同性电子可进一步对投射角求平均

对于 $\omega < \omega_1$ ，或者 $\omega > \omega_2$ ，谱形类似单电子低、高频渐近。

$$F(x) \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3} \Gamma(\frac{1}{3})} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}, \quad x \ll 1,$$

$$F(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} e^{-x} x^{1/2}, \quad x \gg 1.$$

但是，在低频端，自吸收频率可能更高。

幂律分布电子产生幂律谱的物理原因

$$\omega_m = 0.29 \times \frac{3\gamma^2 eB \sin \alpha}{2m_e c}$$

- ❖ 一个能量为 γ 的电子的同步辐射集中在峰值 $0.29v_c \propto \gamma^2$ 的频段。尽管单电子同步辐射已经不是单色谱，但由于存在各种能级的电子，能级为 γ 的电子主导着频率为 $\nu=0.29v_c$ 处的辐射，对 $0.29v_c$ 以外频段的贡献不那么重要。因此，电子的辐射可以看成准单色辐射，集中于频率 $\sim 0.29v_c \propto \gamma^2$ ，即有能量 γ 和频率 ω 的一一对应（近似）。所以，**能谱幂律分布的电子产生与电子能谱指数相关的幂律分布的辐射谱。**
- ❖ **辐射谱比电子能谱更平**：同步辐射总功率也 $\propto \gamma^2$ ，即高能电子有更强的辐射（尽管 $P(\omega)$ 对 γ 的依赖不尽相同）。对具有幂律能谱分布(γ^{-p})的电子系，尽管 γ 值大的高能电子数下降很快，但单电子产生的辐射较强，故多电子的辐射总功率随频率变化相对于粒子的能谱分布更为平缓($\gamma^{-(p-1)/2}$)。
- ❖ 当 $\nu \gg \gamma_2^2 \frac{eB}{2\pi m_e c}$ 即频率显著超过最高能量电子的特征频率时，同步辐射谱应以指数形式随频率迅速下降，对应能量 $\sim \gamma_2$ 的电子的高能尾

同步自吸收

- 同步自吸收：同步辐射在源内传播中被产生辐射的电子吸收
- 爱因斯坦系数关系求同步辐射的吸收。将爱因斯坦系数一般化后（适合能级连续分布的粒子），再将同步辐射看成能量连续分布的电子的自发跃迁辐射，由已知的辐射功率求发射系数，再利用爱因斯坦系数之间的关系求吸收
- 同步吸收由真吸收和受激发射（负吸收）组成，吸收系数

$$\alpha_{\nu} = \frac{c^2}{8\pi h\nu^3} \int d^3 p_2 \left[f(p_2^*) - f(p_2) \right] P(\nu, E_2)$$

其中 p_2^* 对应能量为 $E_2 - h\nu$ 的动量， $f(p)$ 表示动量为 p 、单位相空间内的电子数目。

吸收系数与辐射粒子（电子）的分布有关

若相对论电子具有幂律能谱，则吸收系数表示为

$$\alpha(\nu) = \frac{\sqrt{3}q^3}{8\pi m} \left(\frac{3q}{2\pi m^3 c^5} \right)^{p/2} C (B \sin \alpha)^{(p+2)/2} \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \nu^{-(p+4)/2}$$

注意：上述吸收公式假设了电子是极端相对论的 ($\beta \rightarrow 1$)，辐射场光子的能量远小于电子的能量 ($h\nu \ll E$)。这对于同步辐射光子场是基本成立的，上述结果显示低频吸收强，因此是自洽的

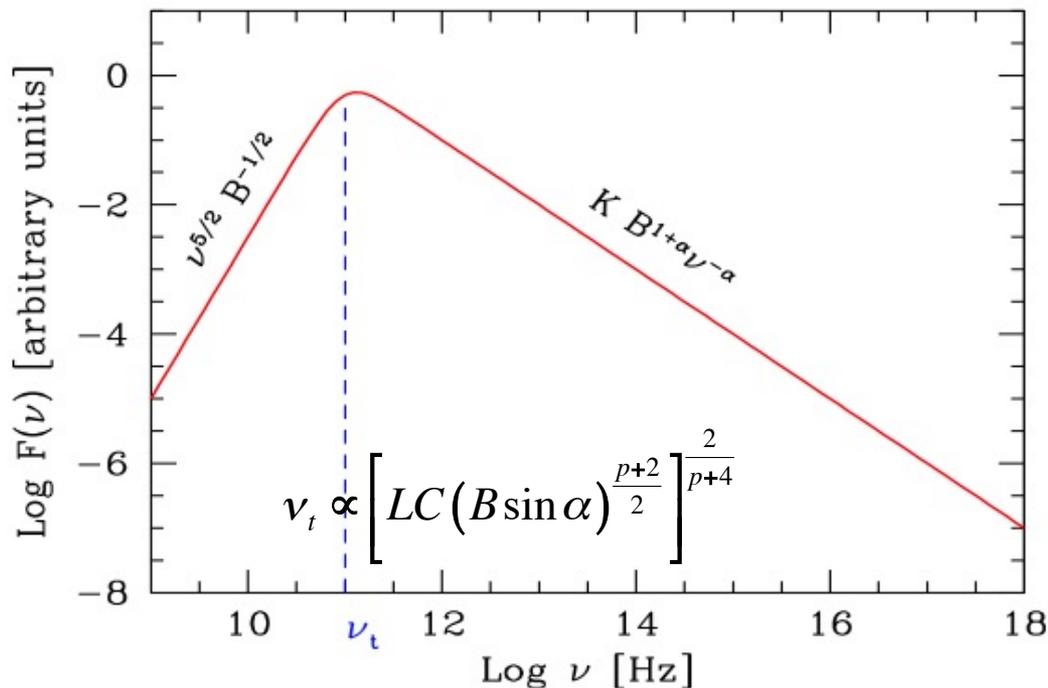
吸收特征：频率越低，吸收越强。同步吸收在低频端变得很重要

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{P(\nu)}{4\pi\alpha_\nu} \propto \nu^{5/2}$$

源函数的谱指数与电子能谱无关

在吸收很强时，光学厚，辐射强度即为源函数，正比于频率的5/2次方，与电子的能谱指数无关。（源函数与热平衡系统的源函数 B_ν 不同）

幂律分布电子系在磁场中的同步辐射谱-从光薄到光厚



由临界光深

$$\tau(\nu_t) = \alpha(\nu_t)L = 1$$

确定的同步自吸收频率处的辐射重要

均匀介质层，辐射转移 $I_\nu(\tau_\nu) = I_{\nu,0} e^{-\tau_\nu} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu})$

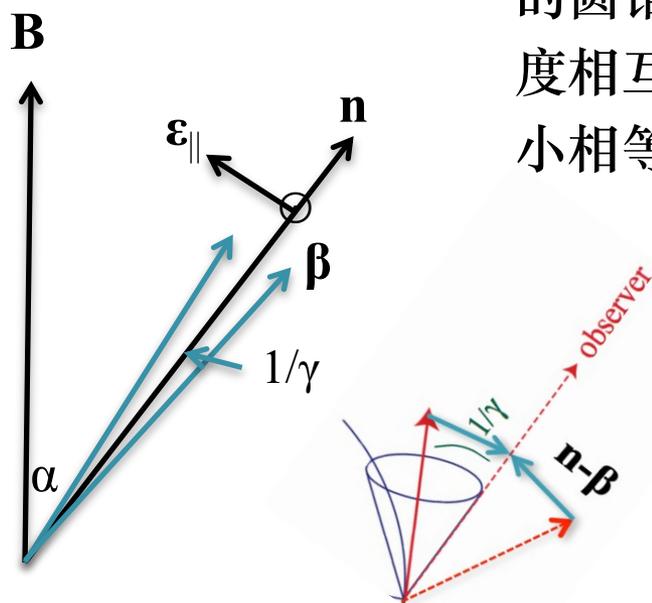
- 高频端，吸收不重要，幂律谱 $I_\nu(\tau_\nu) = j_\nu L \propto \nu^{-(p-1)/2}$
- 当频率足够低，光深 $\gg 1$ ，出现低频倒转谱： $I_\nu(\tau_\nu) = j_\nu / \alpha_\nu \propto \nu^{5/2}$
- 同步辐射源在低频比黑体谱 ($I_\nu \propto \nu^2$) 更陡

同步辐射的偏振：

- 单电荷的同步辐射是椭圆偏振的，在速度方向的辐射是线偏振
- 若辐射电子的速度分布各向同性， $\beta \rightarrow 1$ ，则粒子系的辐射是部分线偏振的，偏振方向垂直于磁场和观测方向构成的平面。

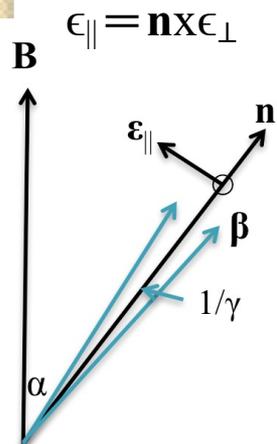
物理原因：对于观测方向 \mathbf{n} ，任意时刻的辐射由速度方向位于以 \mathbf{n} 为轴心、半张角为 $1/\gamma$ 的圆锥内的所有电子共同贡献的。在锥内速度相互对称的两个方位的电子，辐射电场大小相等、方向相反，构成物偏振成分。

只有速度刚好在观测方向的电子的辐射电场无反方向对应成分，这部分为线偏振。



偏振度:

同步辐射的偏振度可以用两分量的辐射谱功率表示:



$$\Pi(\omega) = \frac{P_{\perp}(\omega) - P_{\parallel}(\omega)}{P_{\perp}(\omega) + P_{\parallel}(\omega)} = \frac{G(x)}{F(x)} \quad \text{与}\gamma\text{有关}$$

$$F(x) \equiv x \int_x^{\infty} K_{\frac{2}{3}}(\xi) d\xi, \quad G(x) \equiv x K_{\frac{2}{3}}(x),$$

P_{\perp} 方向即偏振方向（垂直于磁场和传播方向 n ）

✧ 对于能量为 γ 的各向同性电子系产生的同步辐射，对频率积分

得到**总辐射**的线偏振度 $\Pi = \frac{3}{4}$

✧ 对于能量以幂律分布的电子，对电子能谱积分，得到**单色辐射**的线偏振度:

$$\Pi = \frac{p+1}{p+7/3}$$

回旋辐射的偏振特性

电子受洛伦兹力做回旋运动

$$\begin{aligned}v_x &= v_{\perp} \cos(\omega_B t + \delta) & v_z &= v_{\parallel} \\v_y &= v_{\perp} \sin(\omega_B t + \delta)\end{aligned}$$

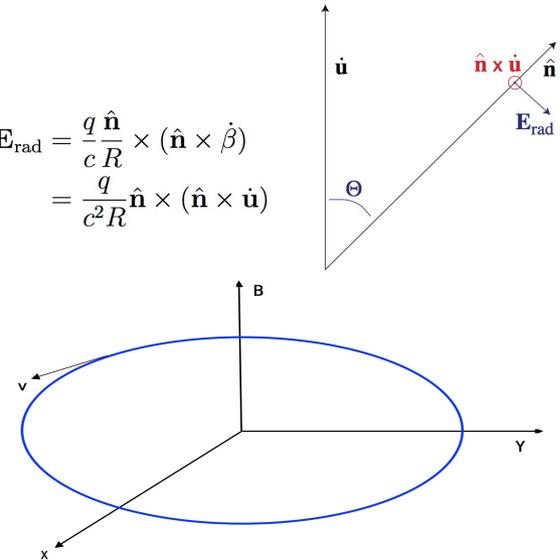
圆周运动是两个方向垂直、频率相同、相位差为 $\pi/2$ 的简谐振动的合成。

电子的低速圆周运动可看成二维的电偶极子（一个在X轴上，一个在y轴上），其辐射是两个偶极子辐射的叠加。两个偶极子辐射的电矢量互相垂直（因为 $E \propto [n \times (n \times \text{加速度})]$ 推迟）。不同传播方向偏振特征不同：

- 在Z轴方向，X轴上的偶极子产生的辐射电矢沿x轴（“振动”），Y轴上的偶极子产生的辐射电矢沿y轴，二者大小相同、相位相差 $\pi/2$ ，合成了圆偏振。
- 在XY平面内的任意方向，加速度为向心加速度，电矢方向在XY平面内且垂直于传播方向（即在加速度和 \mathbf{n} 构成的平面内且垂直于 \mathbf{n} ），线偏振。
- 在任意方向，电矢量随时间有规律变化，椭圆偏振（看成Z轴方向和XY平面的合成）

随着电子速度的增大，辐射的方向性渐现，辐射与速度有关，上述讨论不再成立 \longrightarrow 同步辐射的偏振

$$\begin{aligned}E_{\text{rad}} &= \frac{q}{cR} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \\&= \frac{q}{c^2 R} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{u}})\end{aligned}$$



3. 逆康普顿散射

散射总览

- 汤姆逊散射: 静止(或低速)电子与低频光子散射。

经典方法: 电子在光的电磁场中受库仑力加速运动产生偶极辐射, 散射后光子频率不变, 弹性散射, 用汤姆逊散射截面描述

- 康普顿散射: 静止(或低速)电子与相对高频光子散射。

方法: 电子-光子的碰撞过程, 光子失去能量给电子

散射截面由Klein-Nishina公式描述 (量子电动力学)。

- 逆康普顿散射: 高能电子与相对低能光子散射

电子将部分能量传给光子, 光子能量增加, 此过程称为逆康普顿散射⇒辐射过程, 在吸积黑洞, 中子星, 喷流等高能天体中非常重要

辐射功率由散射后光子的能量和散射截面导出

相对论方法: 粒子坐标系的经典结果经相对论变换

汤姆逊散射特征

✧ 经典汤姆逊散射将入射光作为连续的电磁波处理，结论成立的条件是： $h\nu \ll m_e c^2$ ，结果：

➤ 频率不变 $\varepsilon = \varepsilon_1$

➤ 微分散射截面：

$$\text{线偏振波 } \frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \sin^2 \Theta \quad \text{无偏振波 } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta)$$

➤ 总散射截面与入射波偏振性质无关 $\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_0^2$

经典电子半径 $r_0 \equiv e^2 / (m_e c^2) = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$.

偏振特性：线偏振波被散射后依然是线偏振的，无偏振波被电子散射后变成部分偏振波，偏振度与散射角（方向）有关：

$$\Pi = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}$$

✧ 一般情况下应考虑量子效应，把电子对光波的散射看成电子-光子的碰撞过程—康普顿散射。

康普顿散射

光子与**静止（或低速）**的电子碰撞，如上图，应用量子理论，由能量守恒和动量守恒得到Compton散射公式：

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\varepsilon}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$$

运动电子

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1 - \beta \cos\alpha_i}{1 - \beta \cos\alpha_f + \frac{\varepsilon}{\gamma mc^2}(1 - \cos\theta)}$$

在 $\beta=0$ 时，散射光频率小于入射光，光子损失能量给电子。

当入射波波长 $\lambda \gg \lambda_c = 2.4 \times 10^{-10} \text{cm}$ 时， $\lambda_1 \approx \lambda$ ，即 $\varepsilon \ll mc^2 = 0.511 \text{MeV}$ ，弹性散射，所以对于大部分天文研究的波段（ $\varepsilon \ll 0.511 \text{MeV}$ ），与**静止/低速**电子的散射可以看作弹性散射。即便**中等能量**的X-射线，仍然满足弹性散射条件

当光子能量 $h\nu$ 接近电子静止能量 $m_e c^2$ 时，如高能X射线、 γ 射线，量子效应出现，这时散射截面依赖于入射光子的能量。从量子电动力学可知，无偏振的高能辐射的微分散射截面由 *Klein-Nishina* formula表示（康普顿散射的普适公式）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - \sin^2 \theta \right)$$

微分散射截面随 $\varepsilon/\varepsilon_1$ 的增大而增大，利用 ε 与 ε_1 的关系，微分散射截面随 ε 的增大而减小

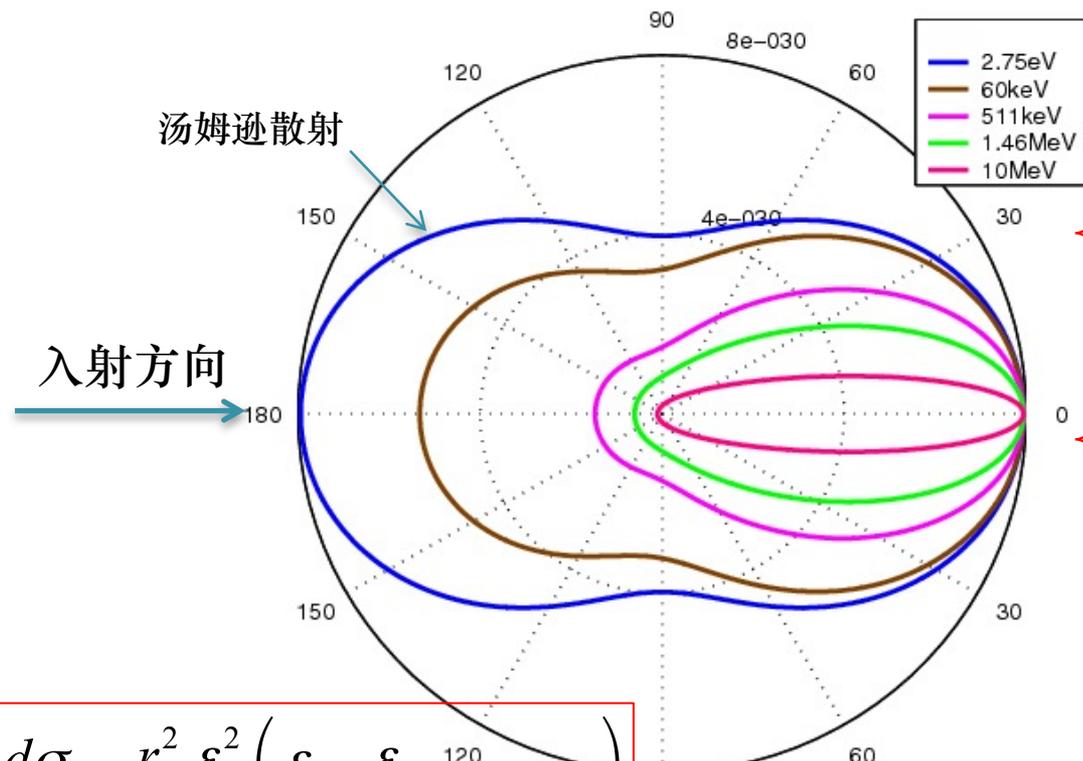
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

当 $h\nu \ll m_e c^2$ ， $\varepsilon \simeq \varepsilon_1$ ，上式变成汤姆逊散射公式，是Klein-Nishina截面的经典极限形式。Klein-Nishina公式的主要效应是，随着光子能量的增大，散射截面变小。因此，高能光子的康普顿散射效应变弱，见图。

这一结果从经典的角度可以理解为：电场振荡太快，由于惯性，电子来不及响应，因而受迫振动很小，产生的辐射也很小

微分散射截面角分布与光子能量的关系

Klein–Nishina distribution



- ✧ 光子能量越大，微分散射截面越小，特别是在散射角大的方向
- ✧ 随着光子能量的增加，散射趋向于光子的运动/传播方向，其他方向分布非常小。说明高能光子的**穿透性**很强。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon} - \sin^2 \theta \right)$$

经典条件下微分散射截面反映的是入射能流被散射后的散射辐射的角分布（花生形状） $\frac{dP_s}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} S_i$

总散射截面

$$\sigma = \sigma_T \cdot \frac{3}{4} \left[\frac{1+x}{x^3} \left\{ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right\} + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right] \quad (7.5)$$

where $x \equiv h\nu / mc^2$. In the nonrelativistic regime we have approximately
当 $h\nu_1 = h\nu$, Klein-Nishina公式简化成汤姆逊散射截面形式

$$\sigma_{\text{KN}} \simeq \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right); \quad x \ll 1 \quad (7.6a)$$

whereas for the extreme relativistic regime we have

当光子能量很大时, 康普顿散射截面变得很小, 所以高能光子被电子散射的几率很小

$$\sigma_{\text{KN}} \simeq \frac{3}{8} \frac{\sigma_T}{x} \left[\ln(2x) + \frac{1}{2} \right]; \quad x \gg 1$$

高能光子的散射特征总结:

✧ 总散射截面小，只有极少量光子被散射

$$\sigma_{\text{KN}} \simeq \frac{3}{8} \frac{\sigma_{\text{T}}}{x} \left[\ln(2x) + \frac{1}{2} \right]; \quad x \gg 1$$

✧ 被散射的光子散射后集中在原传播方向 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} - \sin^2 \theta \right)$
且该方向的散射光子能量与入射光子相同

✧ 被散射到其他方向的散射光子的能量相对于入射光子很小

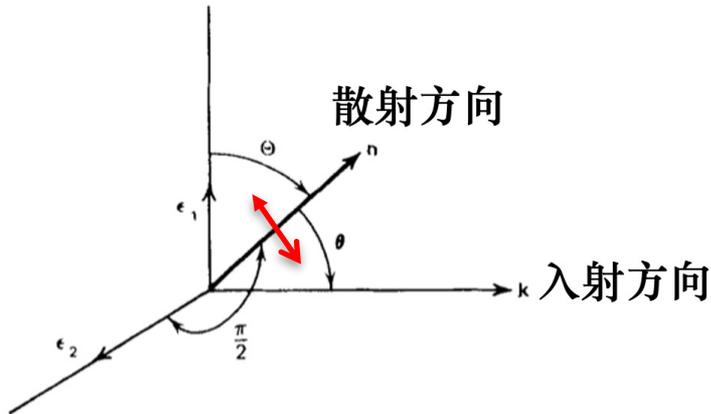
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{mc^2} (1 - \cos \theta)}$$

所以，当光子能量达到一定值时，可以认为“自由穿过”介质。

散射的偏振特征

线偏振的入射波被电子散射后仍然是线偏振的；
无偏振的入射波被电子散射后是部分偏振的，偏振方向垂直于散射平面，偏振度与散射方向有关，当散射方向与入射方向相同时，偏振度为零，而在垂直于入射波的方向，偏振度等于1。

$$\Pi = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}$$



Geometry for scattering unpolarized radiation.

物理原因：无偏振波可分解为两列同振幅线偏振波波，一列电矢量位于散射平面内，一列垂直于散射平面。前者的散射截面与散射方向有关，后者与方向无关，合成成部分线偏振波。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \sin^2 \Theta$$

逆康普顿散射：辐射功率

- ❖ 光子散射前后的能量变化范围是 $0 - 4\gamma^2 h\nu_i$ （电子参考系中的能量动量守恒+频率的相对论变换），散射光子平均能量 $(4/3)\gamma^2 h\nu_i$ 。
- ❖ 单位时间内被电子散射的光子数 $\sigma_T c N_{ph}$

相对论电子的逆康普顿散射的辐射功率：

若光子散射前
 $\gamma h\nu \ll mc^2$

$$P_{comp} = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{ph} \approx 2.6 \times 10^{-14} U_{ph} \gamma^2 \text{ erg/s}$$

比较同步辐射功率

$$P_{syn} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 r_0^2 c \beta^2 \gamma^2 B^2 = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

$$\frac{P_{comp}}{P_{syn}} \approx \frac{U_{ph}}{U_B}$$

电子系的逆康普顿散射功率

已知单电子辐射功率：
$$P_{comp} = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{ph}$$

电子系的辐射功率为所有电子辐射和，取决于电子能谱分布。

对于能谱幂律分布的相对论电子，数密度在能量 $\gamma \rightarrow \gamma + d\gamma$ ，
且 $\beta \rightarrow 1$ ，
$$N(\gamma) = C \gamma^{-p} \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$$

$$P_{tot} (\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3}) = \int P_{comp} N(\gamma) d\gamma = \frac{4}{3} \sigma_T c U_{ph} C (3-p)^{-1} (\gamma_2^{3-p} - \gamma_1^{3-p})$$

对于处于热平衡的非相对论电子， $\gamma \simeq 1$ ， $\langle \beta^2 \rangle = 3kT/mc^2$ ，
若电子数密度为 n_e ，则热电子的逆康普顿散射功率：

$$P_{tot} = \frac{4}{3} \sigma_T c \gamma^2 \beta^2 U_{ph} n_e = \frac{4kT}{mc^2} n_e \sigma_T c U_{ph}$$

电子的辐射寿命

由逆Compton散射的辐射功率可求出相对论电子的辐射寿命为：

$$t_{comp} \approx \frac{\gamma mc^2}{P_{comp}} \approx \frac{3 \times 10^7}{\gamma U_{ph}} s$$

对于类星体，若 $U_{ph} \sim 1$ ，逆康普顿散射可能是相对论电子最主要的辐射机制及耗能过程。

与同步辐射相比较

$$t_{syn} = \gamma mc^2 / \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B \sim \frac{7.75 \times 10^8}{B^2 \gamma} s$$

逆康普顿散射与同步辐射损耗引起的电子辐射寿命之比等于磁场能量密度与软光子场的能量密度之比

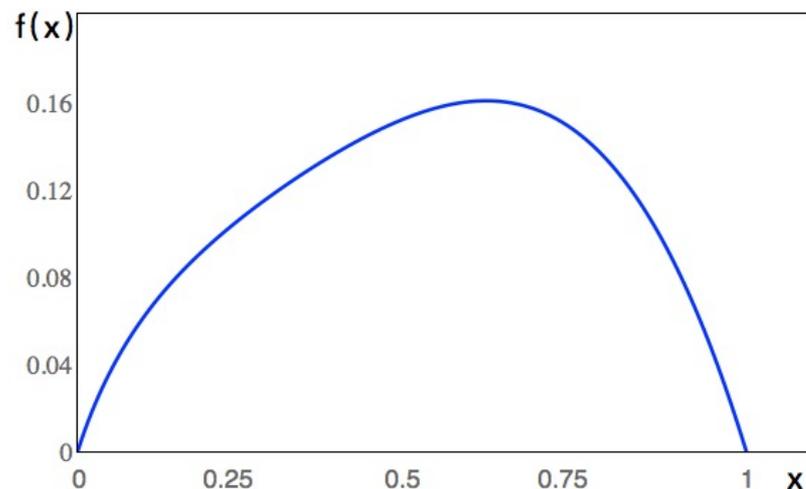
逆康普顿散射：辐射谱

各向同性单色光子的逆康普顿散射谱特征

$$P(\nu) = 8\pi r_0^2 c h f(\nu / 4\gamma^2 \nu_i) n_{ph}$$

$$f(x) = f(\nu / 4\gamma^2 \nu_i)$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \ln x + x^2 - 2x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$



- ✧ 辐射谱功率在 $\nu = 2.4\gamma^2\nu_i$ 最大值0.16，光子数峰值位于 $\nu = (4/3)\gamma^2\nu_i$
- ✧ 在 $\nu \ll \gamma^2 h\nu_i$ 时，谱功率 $P(\nu) \propto \nu$ ，对于高频 $\nu > 2.4\gamma^2\nu_i$ ，辐射谱迅速下降
- ✧ Compton辐射谱分布相当弥散。

电子系逆康普顿散射的谱分布

辐射谱与电子的分布和软光子谱分布有关，大多数情况下由相对论电子的能谱分布决定

$$P(\nu) = 8\pi r_0^2 ch \iint N(\gamma) f(\nu / 4\gamma^2 \nu_i) n_{ph}(\nu_i) d\nu_i d\gamma$$

✧ 软光子场，

✦ 黑体—比如光学厚热气体

✦ 幂律—比如同步辐射

✧ 电子分布

✦ 幂律分布的电子

✦ 热电子： γ 不是特别大，需考虑多次散射的结果

幂律分布的电子系对幂律入射谱的散射

若入射场光谱和电子能谱都是幂律形式，

$$n_{ph}(\nu_i) = n_0 \nu_i^{-q} \quad \nu_1 < \nu_i < \nu_2$$

$$N(\gamma) = N_0 \gamma^{-p} \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$$

原则上散射谱分布在 $0-4\gamma_2^2\nu_2$ 的频率范围。对于任意频率 ν ，需对光子分布和电子分布积分，

$$\begin{aligned} P(\nu) &= 8\pi r_0^2 ch \iint N(\gamma) f(\nu / 4\gamma^2 \nu_i) n_{ph}(\nu_i) d\nu_i d\gamma \\ &= 4\pi r_0^2 ch N_0 \int n_{ph}(\nu_i) \left(\frac{\nu}{4\nu_i} \right)^{-\frac{p-1}{2}} \left[\int_{\frac{\nu}{4\gamma_2^2 \nu_i}}^{\frac{\nu}{4\gamma_1^2 \nu_i}} f(x) x^{\frac{3-p}{2}} dx \right] d\nu_i \end{aligned}$$

要求 $v_2/v_1 \ll (\gamma_2/\gamma_1)^2$, 通常很容易满足

i) 若满足 $4\gamma_1^2 v_2 \ll 4\gamma_2^2 v_1$, 则在 $4\gamma_1^2 v_2 < v < 4\gamma_2^2 v_1$ 内为幂律谱:

$$P(v) = 8\pi r_0^2 ch \iint N(\gamma) f(v / 4\gamma^2 v_i) n_{ph}(v_i) dv_i d\gamma$$

$$= 4\pi r_0^2 ch N_0 \int n_{ph}(v_i) \left(\frac{v}{4v_i} \right)^{-\frac{p-1}{2}} \left[\int_{\frac{v}{4\gamma_2^2 v_i}}^{\frac{v}{4\gamma_1^2 v_i}} f(x) x^{-\frac{3-p}{2}} dx \right] dv_i$$

$$= 4\pi r_0^2 ch N_0 \left[\int_0^1 f(x) x^{-\frac{3-p}{2}} dx \right] \int n_{ph}(v_i) \left(\frac{v}{4v_i} \right)^{-\frac{p-1}{2}} dv_i \propto v^{-\frac{p-1}{2}}$$

这时非热辐射场的逆康普顿散射谱由电子的能谱决定, 与入射光谱形状无关。所以, 当电子具有幂律能谱时, 且分布很宽时, 康普顿辐射谱在高频端也为幂律形式, 谱指数为 $(p-1)/2$ 。与同步辐射谱相同, 原因是二者都将入射光子的频率提高了 γ^2 倍。

要求 $v_2/v_1 \gg (\gamma_2/\gamma_1)^2$, 通常不容易满足

ii) 若满足 $4\gamma_2^2 v_1 \ll 4\gamma_1^2 v_2$, 则在 $4\gamma_2^2 v_1 < v < 4\gamma_1^2 v_2$ 频率范围内有:

$$P(v) = 8\pi r_0^2 ch \iint N(\gamma) f(v / 4\gamma^2 v_i) n_{ph}(v_i) dv_i d\gamma \propto v^{-(q-1)}$$

等价于: $n(v) \propto v^{-q}$ for $4\gamma_2^2 v_1 \ll v < 4\gamma_1^2 v_2$

这时非热辐射场的逆康普顿散射谱仍保持原来的幂律形式。但是, 这要求电子能量分布远远窄于入射场能量分布, 即 $4\gamma_2^2 v_1 \ll 4\gamma_1^2 v_2$, 否则散射谱偏离幂律谱。

iii) 当我们所关心的频率 v 不满足上述两个条件, 积分上限或下限或者上下限与频率有关, 这时的辐射谱不再是简单的幂律谱。即在不满足上述条件的其它频段不是简单的幂律谱

幂律分布的电子系对黑体谱的散射

如初始辐射场具有黑体谱，能量密度 $U_{ph}(v_i)=4\pi B(v_i)/c$,

则有
$$n_{ph}(v_i)dv_i = \frac{U_{ph}(v_i)dv_i}{hv_i} = \frac{8\pi v_i^2}{c^3} \frac{1}{e^{hv_i/kT} - 1} dv_i$$

代入谱发射系数公式得到
$$P(v) = \pi r_0^2 ch N_0 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2(p+1)(p+5)} v^{\frac{p-1}{2}} \int v_i^{\frac{p-1}{2}} n_{ph}(v_i) dv_i$$

$$P(v) = \frac{2r_0^2}{\hbar^2 c^2} N_0 b(p) (kT)^3 \left(\frac{kT}{hv} \right)^{\frac{p-1}{2}}$$
$$= 4.2 \times 10^{-40} N_0 b(p) T^3 \left(\frac{v}{2.1 \times 10^{10} T} \right)^{-\frac{p-1}{2}} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}$$

其中
$$b(p) = \frac{2^{p+3} (p^2 + 4p + 11) \Gamma\left(\frac{p+5}{2}\right) \zeta\left(\frac{p+5}{2}\right)}{(p+3)^2 (p+1) (p+5)}$$
 为黎曼 ζ 函数，可数值求得

结论：黑体辐射被幂律分布的电子散射后的谱是幂律谱，
谱指数由能谱指数决定 $\alpha = \frac{p-1}{2}$

从一次散射到多级散射

- 软光子被电子散射一次所形成的谱只有在多级散射可忽略的情况下才能代表散射谱。在天体物理中，这通常只在光深远小于1的情况，即软光子场穿过非常稀薄的高温气体或非热高能电子云时成立。
- 另一方面，很多情况下电子的能量并不是那么高，多次散射才能显著改变光子的能量

更实际的情况：多级散射—康普顿硬化
(Comptonization)。

多次散射：康普顿y参数

- 通常定义康普顿y参数(Compton y-parameter) 来衡量多次散射重要与否：

$$y \equiv \frac{\Delta(h\nu)}{h\nu} \cdot N = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \cdot N$$

- 光子每一次散射能量的平均相对改变量
- 光子穿过散射气体所经历的平均散射次数

注：y参数只在光子每次散射能量的相对改变量较小的条件下才能真正代表光子的总能量的相对改变量

$$\frac{\varepsilon_N - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \left(1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)^N - 1 \approx \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} N$$

- 当 $y \gtrsim 1$ 时，康普顿散射显著改变了入射光子的能量和光谱，这时多次散射很重要
- 当 $y \ll 1$ 时，出射能谱改变较小

热电子的康普顿 y 参数

- 光子每次散射的平均能量变化由电子的能量 γ 决定。对于热电子，电子能量即热运动能量由温度度量。
- 光子被散射的次数则由散射光深决定， $N = \max\{\tau_{es}, \tau_{es}^2\}$

所以，康普顿 y 参数表示为

$$y_{NR} = \frac{4kT - \epsilon}{mc^2} \max\{\tau_{es}, \tau_{es}^2\}$$

非相对论电子且 $\epsilon \ll 4kT$

$$y_R = \left(\frac{4kT}{mc^2}\right)^2 \max\{\tau_{es}, \tau_{es}^2\}$$

相对论电子

康普顿 y 参数用于分析入射光子流穿过散射光深为 τ_{es} 的介质后能量变化的显著性，与光深和电子温度有关。

注：在有效光厚的介质中的散射光深会由于吸收而减小，
上书公式中的有效散射光深 $\tau_{es} = \rho k_{es} l_*(\nu)$

光子在高温热等离子体中的康普顿硬化谱

康普顿硬化重要与否取决于单次散射的能量变化率与散射光深，可分为如下几种情况：

✧ 光学薄： $\tau_{es} < 1$,

相对论电子：幂律谱

 非相对论电子： y 小，不重要；但温度接近相对论时依然重要

✧ 光学厚：

高温非相对论电子：多次散射依然会不同程度地改变光谱

$\tau_{es} \gtrsim 1$ ，求解Kompaneets方程

$\tau_{es} \gg 1$ ，saturation(饱和)

$\tau_{es} > 1, y > 1$ ，quasi-saturation

 相对论电子与光子的散射求解困难

 讨论光学薄的高速电子的散射和光学厚的非相对论电子的散射

光学薄的热电子的逆康普顿散射谱

高温电子: 低频光子经电子逆康普顿散射产生幂律辐射谱

$$I(\varepsilon_k) \sim I(\varepsilon_i) \tau_{es}^k = I(\varepsilon_i) \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i} \right)^{-\alpha} = I(\varepsilon_i) (A^k)^{-\alpha}$$

其中谱指数

$$\alpha = \frac{-\ln \tau_{es}}{\ln A} \sim \frac{-\ln \tau_{es}}{\ln y - \ln \tau_{es}}$$

~后部分只对相对论电子成立

热电子多次散射也能产生幂律谱!

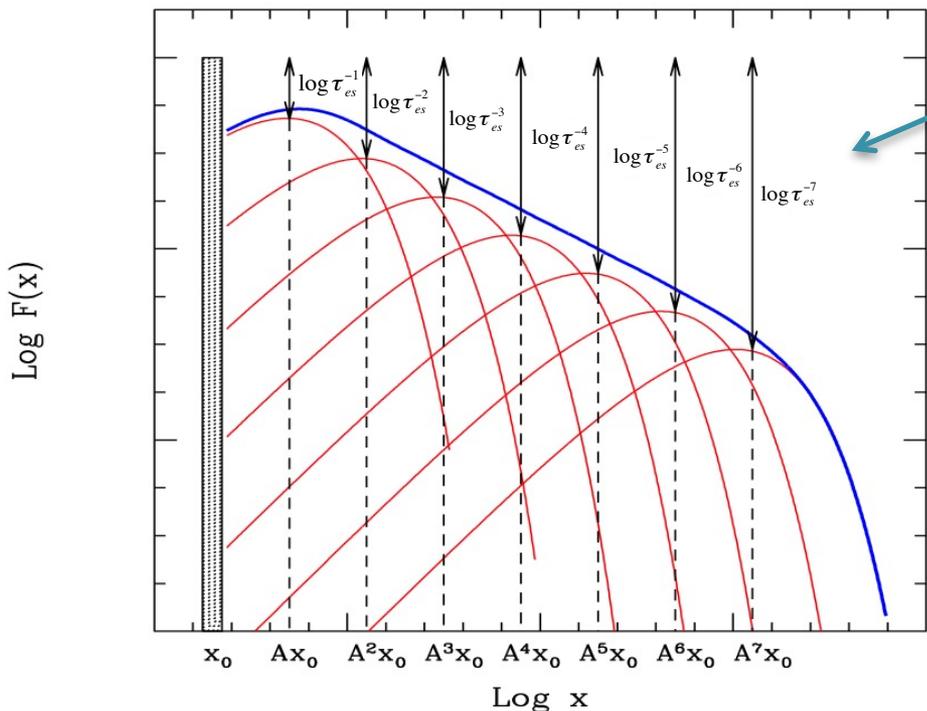
注意成立的基本条件: 光学薄且只在 $h\nu < (12)^{1/2} kT$ 范围,

因为

$$\langle \gamma^2 \rangle^{1/2} \varepsilon_{k-1} < mc^2 \Leftrightarrow \varepsilon_k < \langle \gamma^2 \rangle^{1/2} mc^2$$

低温电子: 趋于弹性散射, 且散射次数少, 对辐射的贡献可忽略。若光子能量高于电子能量, 康普顿软化

光学薄相对论电子的逆康普顿散射谱的构成



$$\log F(x_0) - \log F(x_k) = \log \frac{F(x_0)}{F(x_k)} = \log \frac{1}{\tau_{es}^k} = \log \tau_{es}^{-k}$$

where $x = \frac{h\nu}{mc^2}$

$$I(\epsilon_k) \sim I(\epsilon_i) \tau_{es}^k \quad A_R \approx \left(\frac{4kT}{mc^2} \right)^2$$

从图也可以看出：

τ_{es} 越大，谱越平 (α 越小)

T 越大，谱越平

y 越大，谱越平

幂律谱的形成是多级康普顿散射谱的叠加，出射光子中能量越高的光子经历的散射次数越多。由于多次散射的概率越小，尽管多次散射光子的能量很大，高能光子的辐射强度仍然较小。

光学薄相对论电子的逆康普顿散射谱随 y 的变化

$$\alpha = \frac{-\ln \tau_{es}}{\ln A} \sim \frac{-\ln \tau_{es}}{\ln y - \ln \tau_{es}}$$

“ \sim ”后只对相对论电子成立

$$A_R = 1 + \left(\frac{4kT}{mc^2}\right)^2 \approx \left(\frac{4kT}{mc^2}\right)^2$$

$y \sim 1, \alpha \sim 1$, 谱比较平 ($F_\nu \propto \nu^{-1}$)

$y > 1, \alpha < 1$, 谱变平变硬

$y < 1, \alpha > 1$, 谱变陡变软

特殊情况: 在 $\tau_{es} \ll 1$ 而 A 又相当大时, 一次散射和二次散射的光子能量可以相差很大, 而多次散射的几率又非常小, 所以光谱看起来像两、三个大bump, 叠加在一起不是光滑的幂律谱。

光学薄相对论电子的逆康普顿散射最典型的应用是在黑洞中: 黑洞吸积盘产生的黑体谱穿过高温气体云时产生幂律分布的高能X射线辐射。

2) 光学厚非相对论热电子的多次散射谱

光学厚介质中电子与光子多次逆康普顿散射所产生的谱，严格来说需要求解辐射转移方程。方程中的发射系数 j_ν 是由来自各方向的 I_ν 在同一地点与电子逆康普顿散射后所贡献的辐射，计算非常繁难。另一种方法则是通过计算机进行Monte Carlo模拟。[Kompaneets](#)发展了一种较为简便的扩散近似方法，基本方法是：

- ✧ 将辐射场与电子系看成光子气与电子气的混合气体
- ✧ 光子与电子散射形成的光子数的频率分布 $n(\epsilon)$ 随时间的变化看成是光子气在[频率空间](#)的扩散过程
- ✧ 当光子-电子气达到平衡时(散射饱和)，扩散停止，频谱 $n(\epsilon)$ 不再随时间改变

Kompaneets 方程 ($\tau_{es} \gtrsim 1$)

$$2 \times \frac{4\pi p^2 dp}{h^3 dv} = \frac{8\pi v^2}{c^3}$$

量子态数目

由于电子的散射，频率为 ω 的每个量子态上的光子数密度分布函数 $n(\omega)$ 随时间演化，($n(\omega)$ 可以小于1)。对于 $\tau_{es} \gtrsim 1$ 、非相对论电子，光子分布满足Kompaneets方程

$$\frac{\partial n}{\partial t_c} = \left(\frac{kT}{mc^2} \right) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right]$$
$$x \equiv \frac{\hbar\omega}{kT}$$
$$t_c \equiv (n_e \sigma_T c) t$$

其中时间 t_c 是以散射一次的时间为单位： $t_c \equiv n_e \sigma_T c t = \frac{ct}{l} = \frac{t}{l/c}$

具有散射次数的含义。

方程描写非相对论电子与光子多次逆康普顿散射时，光子数的分布函数 $n(\omega)$ 随时间的演化。若给定初始(入射)光子场，用数值方法求解上述方程得到 $n(\omega, t)$ 。

两种极限情况的解析近似以及一般情况的分析

i) 在足够长时间后达到稳定的饱和散射

光子被多次散射后能量达到饱和, $\langle h\nu \rangle = 3kT$, 光子与电子能量达到平衡, 形成Bose-Einstein分布, $n \approx e^{-h\nu/kT}$

此后光子再遭散射也不能改变光子的能谱分布。

强度=单位体积单位频率间隔每个量子态上的光子数 $n \times$
相应间隔内的量子态数目 \times 光子能量 $h\nu \times c/4\pi$

$$I_{\nu}^W = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} n h\nu \frac{c}{4\pi} = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\alpha} e^{-h\nu/kT}$$

其中带入了修正因子 $e^{-\alpha}$, 与光子的产生率有关。

饱和散射的能谱为黑体辐射谱中的Wien shape。

饱和散射的总辐射流量:

$$F^W (\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2}) = \pi \int I_{\nu}^W d\nu = \frac{12\pi e^{-\alpha} k^4 T^4}{c^2 h^3}$$

光学厚非相对论电子的饱和散射的条件：

产生饱和散射的**临界光深**为：

$$\varepsilon_N = \varepsilon_i e^y = \varepsilon_i \exp\left(\frac{4kT}{mc^2} \tau^2\right) \approx 3kT \longrightarrow \tau^{cr} = \sqrt{\frac{mc^2}{4kT} \ln\left(\frac{3kT}{\varepsilon_i}\right)}$$

达到散射饱和的**临界散射次数**为：

$$N^{cr} = \frac{mc^2}{4kT} \ln\left(\frac{3kT}{\varepsilon_i}\right)$$

如初始光子能量 ε_i 越小，临界散射次数 N^{cr} 越大，
温度越高，临界散射次数越小（If $3kT \gg \varepsilon_i$ ）。

$$\frac{\partial n}{\partial t_c} = \left(\frac{kT}{mc^2} \right) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right]$$

ii) 在时间较短时，即t远小于光子与电子达到平衡所需时间， $h\nu \ll kT$ ，光子的总能量密度随时间增加，满足：

光子总能量=光子数×光子能量，再对频率积分

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt_c} &= \frac{d}{dt_c} \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3} nh\nu d\nu = \frac{d}{dt_c} \left\{ \frac{8\pi}{c^3 h^3} (kT)^4 \int_0^\infty x^3 n(x) dx \right\} \\ &= \frac{8\pi}{c^3 h^3} (kT)^4 \int_0^\infty x^3 \frac{\partial n(x)}{\partial t_c} dx \approx \int_0^\infty \frac{8\pi}{c^3 h^3} (kT)^4 \left(\frac{kT}{mc^2} \right) 4nx^3 dx = \frac{4kT}{mc^2} U \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{dU}{dt_c} = \frac{4kT}{mc^2} U$$

上述对n先求导再积分，利用Kompaneets equation方程、且忽略方程右边的n、 n^2 项（远小于 $\partial n/\partial x$ ）。于是得到光子的总能量

$E(t)$:

$$U(t) \approx U(0) \exp\left(\frac{4kT}{mc^2} t_c \right) \quad \text{光子场能量密度随时间指数增加}$$

初期，低占有率（稀薄辐射场），散射快

注意到 t_c 即为光子从0到t时刻的散射次数， $t_c \equiv n_e \sigma_T ct = \frac{ct}{l} = N$ 故 $(4kT/mc^2)t_c$ 表示康普顿y参数。与单光子多次散射后的能量 $\epsilon_f = \epsilon_i e^y$ 相似，推广到辐射场的所有光子即得到t时刻辐射场的能量密度

iii) 一般情况下：非饱和条件下的出射谱

一般情况下($\tau_{es} \gtrsim 1$)，散射是非饱和的，光子被电子多次散射后的能量仍然小于电子能量， $n(\omega, t)$ 随时间变化，**需要严格求解Kompaneets方程，或数值模拟**

但是，**在理想条件下**，若有低频光子源稳定地进入（或产生于）有限的散射介质，同时也有散射光子不断地从介质中逃逸，**达到稳定的动态平衡**。源中的散射光子分布函数不随时间变化，逃逸的光谱也是稳定的。

Kompaneets方程变为（散射引起的 n 的增加=逸出）

$$0 = \left(\frac{kT}{mc^2} \right) \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] - \frac{n}{\max(\tau_{es}, \tau_{es}^2)}$$

光子逃离散射系统所引起的光子分布函数减少率，

进入的低频光子没有计入，因为我们关心的是 $h\nu \gg h\nu_0$ 散射谱无贡献。
在 $n < 1$ 时 n^2 项可忽略

上述稳态的Kompaneets方程

✧ 在 $h\nu \gg kT$ 的频率范围内，方程有近似解 $n(x) \propto e^{-x}$

$I_\nu \propto \nu^3 n(\nu)$ 迅速衰减，忽略

✧ 在范围 $h\nu_0 \ll h\nu \ll kT$ 内，即 $x_0 \ll x \ll 1$ ，分布函数 n 很

小， n 、 n^2 项（远小于 $\partial n / \partial x$ ）可忽略，其解为 $n(x) \propto x^m$

→ $I_\nu \propto \nu^3 n(\nu) \propto \nu^{\alpha}$ $m = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{y}}$

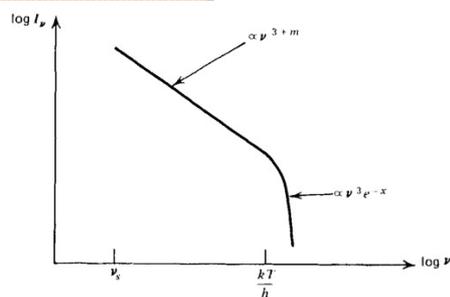
$y \ll 1$ $\alpha = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{y}} \gg 1$ 光子平均能量放大不多，不重要

$$\varepsilon = e^y \varepsilon_i$$

$y \gg 1$ $\alpha = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{4}{y}} < -3$ 光子平均能量大大增加，

通常已饱和，低频段 $\alpha \sim -3$ ，全波段 $I_\nu \propto \nu^3 e^{-x}$

$y \sim 1$ ，不再是简单的幂律谱，是上述两种解的线性的组合
最佳办法：模拟或数值计算



高温热平衡气体的辐射谱

- ❖ 热平衡气体产生韧致辐射，伴有自由-自由吸收。
- ❖ 韧致辐射光子会与热电子发生散射，在康普顿硬化重要的情况下改变辐射谱（极低频因吸收太强散射次数少无硬化）。
- ❖ 出射谱不仅与吸收光深、散射光深有关，还与康普顿 y 参数有关
- ❖ 由于 f - f 吸收系数与频率有关，有效平均自由程以及康普顿 y 参数都有频率有关 \Rightarrow 康普顿硬化也与频段有关。

 吸收、散射、康普顿硬化分频段影响光谱

定义几个特征频率，通常是密度，温度，尺度的函数

✧ ν_0 衡量真吸收和散射谁占主导 $x \equiv \frac{h\nu}{kT}$

✧ ν_t 则衡量吸收是否重要

✧ ν_{coh} 衡量有效光厚条件下康普顿硬化是否重要

✧ y 参数衡量康普顿硬化是否重要

不同的系统参数，即源的温度、密度、尺度决定了源的辐射（出射）谱形。在 $y \gg 1$ 和 $y \ll 1$ 两种情况下可做近似， y 中等值的情况下必须求解Kompaneets方程。

当温度足够高、散射光深足够大时，非相对论热气体的 $y \gg 1$ ，这时热辐射收到康普顿硬化的影响。

非相对论热电子的辐射谱 $\nu_0 < \nu_{\text{coh}} \ll kT/h, y \gg 1$ 的情况:

- ✧ $\nu < \nu_0$: 无散射、自吸收频段(韧致辐射变成黑体), $I_\nu \propto \nu^2$
- ✧ $\nu_0 < \nu < \nu_{\text{coh}}$ 吸收和散射共存、但康普顿硬化不重要, 修正的黑体谱,
$$I_\nu = \frac{2B_\nu}{1 + \sqrt{(\kappa_{ff} + \kappa_{es})\kappa_{ff}^{-1}}}$$
- 当 $\nu \gg \nu_0$, 即 $\kappa_{es} \gg \kappa_{ff}$ 时, $I_\nu \propto \nu$
- ✧ $\nu_{\text{coh}} < \nu < 3kT$ 接近饱和的逆康普顿散射谱
- ✧ 散射达到饱和的维恩bump, 电子和光子达到平衡。

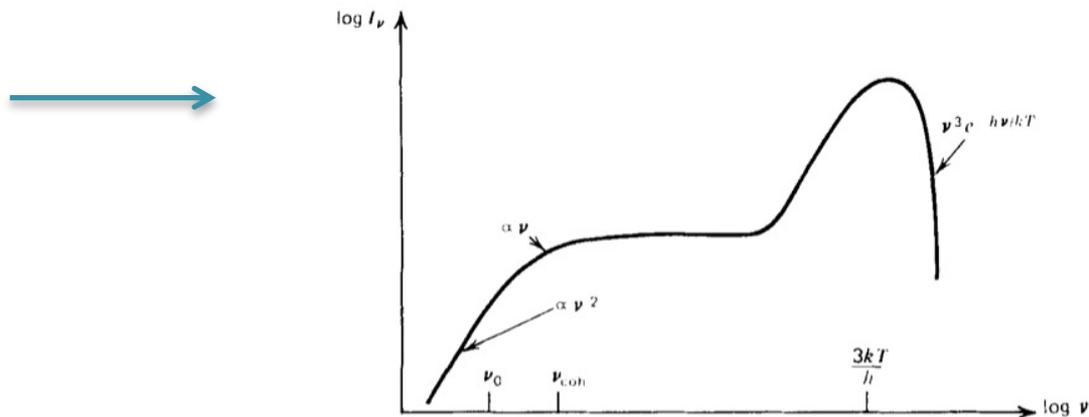


Figure 7.4 Spectrum from a thermal, nonrelativistic medium characterized by free-free emission and absorption and by saturated inverse Compton scattering. At low frequencies the spectrum is blackbody then becomes modified blackbody and, at high frequencies, becomes a Wien spectrum.

4. 同步自康普顿散射 (SSC)

磁场中的相对论电子的实际辐射过程有：

- 电子螺旋运动产生同步辐射
- 同步辐射场与电子逆康普顿散射→同步自康普顿 (Synchrotron Self-Compton; SSC)辐射
- 考虑幂律分布的电子

$$N(\gamma) = N_0 \gamma^{-p} \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$$

在光学薄条件下的SSC过程

同步自康普顿散射的发射率 (SSC emissivity)

- 设电子幂律分布 $N(\gamma) = N_0 \gamma^{-p}$ $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$
- 同步辐射场光子数密度: \approx 源中总光子产生率*光子
在源中的平均停留时间/源的体积

$$n_s(\nu) = \frac{3R}{4c} \frac{P_s(\nu)V}{h\nu V} \equiv n_{s0} \nu^{-(p+1)/2}$$

这里 $3R/4c$ 是光子在尺度为 R 的球对称源中的平均停留时间, P_s 为同步辐射功率。 n_s 代入散射公式

$$P(\nu) = \pi r_0^2 c h N_0 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2 (p+1)(p+5)} \nu^{-\frac{p-1}{2}} \int \nu_i^{\frac{p-1}{2}} n_{ph}(\nu_i) d\nu_i$$

将软光子场 $n_s(\nu) = n_{s0} \nu^{-(p+1)/2}$ 代入散射公式

$$P(\nu) = \pi r_0^2 ch N_0 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2 (p+1)(p+5)} \nu^{-\frac{p-1}{2}} \int \nu_i^{\frac{p-1}{2}} n_{ph}(\nu_i) d\nu_i$$

完成对 ν_i 积分，

$$n_{s0} \int \frac{d\nu_i}{\nu_i} \equiv n_{s0} \ln \Lambda$$

上式积分通常记为 $\ln \Lambda$ ，与同步辐射的能量范围有关。
所以，同步自康普顿辐射的辐射功率

$$P_{ssc}(\nu) = \pi r_0^2 ch N_0 2^{p+3} \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2 (p+1)(p+5)} n_{s0} \ln \Lambda \nu^{-\frac{p-1}{2}}$$

同步自康普顿辐射谱形由电子能谱指数决定。
辐射功率对磁场的依赖隐含在 n_{s0} 中

$$P(\nu) = \frac{\sqrt{3}q^3 N_0 B \sin \alpha}{mc^2(p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{2\pi mc}{3qB \sin \alpha}\right)^{-(p-1)/2} \nu^{-(p-1)/2}$$

因为
$$n_{s0} \nu^{-(p-1)/2} = \frac{3R}{4c} \frac{P_s(\nu)}{h}$$

$$P_{ssc}(\nu) = 3R\pi r_0^2 N_0 2^{p+1} \ln \Lambda \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2 (p+1)(p+5)} P_s(\nu)$$

$$= 9\sigma_T R N_0 2^{p-2} \ln \Lambda \frac{p^2 + 4p + 11}{(p+3)^2 (p+1)(p+5)} P_s(\nu)$$

同步自康普顿辐射流量与同步辐射流量之比

$$P_{ssc} / P_s \propto \tau_{es} \ln \Lambda$$

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d\nu_i}{\nu_i} \equiv \ln \Lambda$$

注意这里 $\tau_{es} = N_0 \sigma_T R$ 不是真的散射光深，不包括真实数密度

对 γ 的依赖因子 γ^{-p}

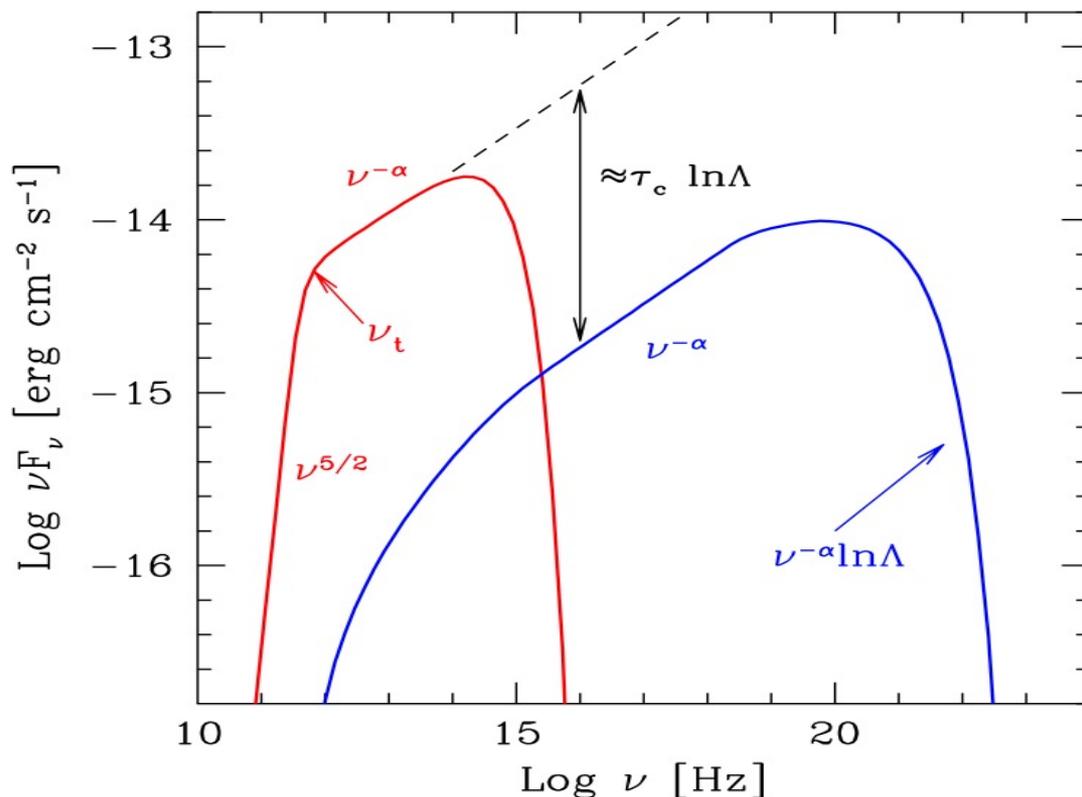
$$N(\gamma) = N_0 \gamma^{-p} \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$$

由于 $P_s \propto N_0$,

故有 $P_{ssc} \propto N_0^2$

同步自康普顿辐射功率与电子数密度（系数）平方成正比

同步自康普顿辐射谱

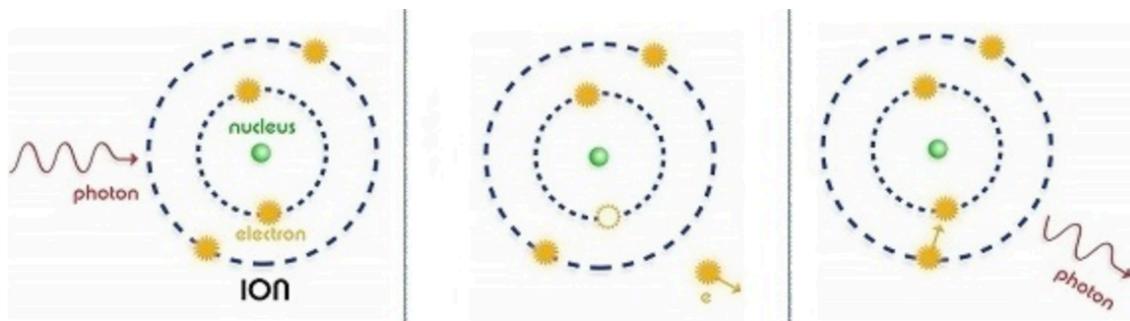


注意图中y轴为 $\log \nu F_\nu$ ，而图中所标注的内容都是指 F_ν 。

$F_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ ， $\nu F_\nu \propto \nu^{-\alpha+1}$ ， $F_{\nu, \text{ssc}}/F_{\nu, \text{s}} \approx \tau_{\text{es}} \ln \Lambda$ ， $F_{\nu, \text{ssc}}$ 在高频段偏离幂律分布并最终指数下降（电子数密度引起）

5、复合辐射，复合线

- ✧ 复合辐射：自由电子被离子俘获过程中产生的辐射。有下限的连续谱，复合辐射光子能量： $h\nu = E_i + I_{Z-1,n}$
- ✧ 复合辐射级联过程--复合线：复合到高激发态的电子向低能级跃迁产生的辐射
- ✧ 荧光辐射线：借助光致电离，高激发态电子向低能级跃迁



Fluorescence. Image credit: Chandra.

复合辐射过程中，电子的终态成为束缚态，因此复合辐射又称为自由-束缚跃迁(free-bound transition)过程。

复合辐射与韧致辐射（自由-自由跃迁）比较：

- ✧ 物理过程相似，但两者常有**不同的辐射频段**。如 $T \sim 10^4 \text{K}$ 时，韧致辐射主要产生射电、红外连续谱，而复合辐射主要在光学波段（因为自由电子进入更低能态--束缚态）。
- ✧ 产生下限频率为 $I_{Z-1,n}/h$ 的**连续谱**
- ✧ 电子在复合到高激发态后, 再从激发态向低能级跃迁发射谱线(级联跃迁过程) — **复合线**。所以**复合辐射产生连续谱和发射线**

复合辐射连续谱

类氢离子的复合辐射谱发射系数：

$$j_R(n, \nu) d\nu = h\nu N_Z N_e \sigma_R(n) \nu f(\nu) d\nu \longrightarrow \text{对所有能级求和}$$

其中 $h\nu = (1/2)mv^2 + I_{Z-1, n}$ 。对于给定能级 n ， ν 与电子能量一一对应。
 $\sigma_R(n)$ 和 $f(\nu)$ 代入上式，并利用 $(1/2)mv^2 = h\nu - I_{Z-1, n}$ 得到：

$$j_R(\nu) = \sum_{n=n_0}^{\infty} j_R(n, \nu) = 1.8 \times 10^{-32} T^{-3/2} N_e N_Z Z^4 e^{-h\nu/kT} \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} \exp \frac{Z^2 I_H}{n^2 kT} \right)$$

考虑给定频率 ν 的辐射，由 $I_{Z-1, n} = Z^2 I_H / n^2$ 和 $h\nu \geq I_{Z-1, n}$ 可定出最低复合能级的主量子数 $n_0 = \left(\frac{Z^2 I_H}{h\nu} \right)^{1/2}$ 。只有 $n \geq n_0$ 这些能级的复合才可能产生给定频率 ν 的辐射（更低的 n 产生的辐射频率大于 ν ）。注意求和下限与频率 ν 有关

复合辐射连续谱

对各种原子序数 Z 、各种电离级次 z 的离子组成的混合等离子体，总的复合辐射连续谱应由上式对各种 Z, z, n 值求和给出，即：

$$j_R(\nu) = \sum_{Z,z,n}^{\infty} j_R^{Z,z}(n, \nu) = 1.8 \times 10^{-32} N_e N_{H^+} T^{-3/2} e^{-h\nu/kT} X$$

其中
$$X = \sum_{Z,z,n} \left(\frac{N_{Z,z}}{N_Z} \right) \left(\frac{N_Z}{N_{H^+}} \right) \left(\frac{\bar{S}}{2n^2} \right) n \left(\frac{I_{Z,z-1,n}}{I_H} \right)^2 \exp\left(-\frac{I_{Z,z-1,n}}{kT} \right)$$

$N_{Z,z}$ 是原子序数为 Z 、净电荷为 ze 的离子数密度，求和是对满足条件 $I_{Z, z-1,n} \leq h\nu$ 的所有能级 n 进行。天体等离子体的离子种类很有限，加之 X 随能级增大迅速减少，上述 X 的求和只有少量几项就足够了。

复合辐射与轫致辐射的比较

低温时，电子平均动能远小于原子的电离势，复合辐射与轫致辐射处于明显不同的频段；而在高温时，二者有重叠频段。比较复合辐射和轫致辐射的谱发射系数，得到在任意给定频率 ν 处，

$$j_B(\nu) = 5.4 \times 10^{-39} Z^2 n_e n_i T^{-1/2} e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{ff}$$

$$j_R(\nu) = 1.8 \times 10^{-32} n_e n_{H^+} T^{-3/2} e^{-h\nu/kT} X$$

$$\frac{j_R(\nu)}{j_B(\nu)} \approx 10^{-1} X / T_6$$

式中 T_6 是以 10^6K 为单位的温度值。

❖ 对给定温度 T_6 ，由于 X 值随频率 ν 值的增大而增加，复合辐射连续谱在高频端可能超过轫致辐射，而轫致辐射在低频端占优势。

- 当 $\lambda \lesssim \sim 30/T_6 \text{ \AA}$ 时，复合辐射超过轫致辐射；
- 当 $\lambda \gtrsim \sim 30/T_6 \text{ \AA}$ 时，轫致辐射大于复合辐射。

$$X = \sum_{n_0}^{\infty} n^{-3} Z^4 \exp\left(\frac{Z^2 I_H}{n^2 kT}\right)$$

$$n_0 = \left(\frac{Z^2 I_H}{h\nu}\right)^{1/2}$$

❖ 对任意给定频率，温度升高时，复合辐射连续谱和轫致辐射之比减少。当温度超过 10^7K 时，除在边界频率 $h\nu = I_{Z, z-1, n}$ 处，复合辐射在所有波长处都不重要。

束缚-自由吸收(bound-free absorption) (光电吸收, photoelectric absorption)

复合辐射的逆过程：原子或离子吸收一个光子，使处于束缚能级上的电子获得能量而逃逸，成为自由电子，这个过程叫**束缚-自由吸收**，也叫**光电吸收**。对于原子来说，原子吸收光子、释放电子变成离子，所以亦叫**光致电离**。

由量子力学计算可知，一处于主量子数 n 的能级上的类H离子*，吸收频率为 ν 的光子而产生光致电离的吸收截面为：

$$\sigma_{bf}(\nu, n) = \frac{32\pi^2 e^6 R_\infty Z^4}{3\sqrt{3} h^3 \nu^3 n^5} g_{fb}(\nu, T) \approx 2.8 \times 10^{29} \frac{Z^4}{\nu^3 n^5} g_{fb}(\nu, T) \text{ cm}^{-2}$$

其中 $R_\infty = 109733 \text{ cm}^{-1}$ 是里德伯常数， g_{fb} 是自由-束缚冈特因子。在光学波段， $g_{fb} \approx 1$ 。

束缚-自由吸收的特点：光子能量及电子所在能级关系

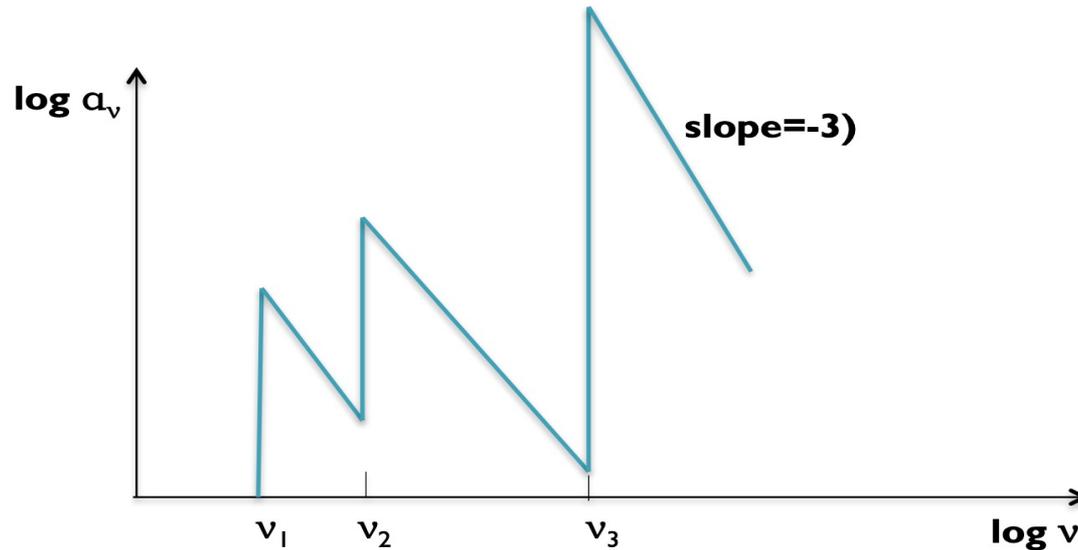
$$\sigma_{bf}(\nu, n) \approx 2.8 \times 10^{29} \frac{Z^4}{\nu^3 n^5} g_{fb}(\nu, T) \text{ cm}^{-2}$$

- 能级 n 的光致电离的阈值频率是 $\nu_n = \frac{Z^2 I_H}{hn^2}$
- 当外来光子频率 $\nu < \nu_n$ 时，能级 n 的光电吸收不可能， $\sigma_{bf}=0$ ；
- 当 $\nu = \nu_n$ ，吸收陡然增到极大；
- 当 $\nu > \nu_n$ ，吸收截面 $\sigma_{bf} \propto \nu^{-3}$ ，随频率快速下降。
- $\sigma_{bf}(\nu, n) \propto 1/n^5$ ，低能态的吸收重要



对于给定能级 n ，阈值频率 $\nu_n = Z^2 I_H / n^2 h$ 的尖锐吸收极大值称为吸收边(absorption edge)。

吸收边(absorption edge)



$$\nu_n = \frac{Z^2 I_H}{h n^2}$$

束缚-自由吸收系数随频率的变化示意图：图中 ν_1 、 ν_2 、 ν_3 对应不同能级的吸收边频率。若 ν_1 代表 n 能级的电离阈值，则 $\nu < \nu_1$ 无吸收， $\nu > \nu_1$ 吸收随 ν^{-3} 衰减，直到达到更低能级 $(n-1)$ 的吸收阈值 ν_2 ，这时吸收陡增，出现新的 $(n-1)$ 吸收边，然后继续随 ν^{-3} 衰减...直到 $n=1$ 。各能级的吸收边的强度依赖于处于该能级的原子数目（上图是任意给的，通常对应 $n=1$ 最强）。类似的吸收边亦可由不同元素的光电吸收引起，对应的频段可能不同，也取决于元素的丰度

光电吸收是连续谱吸收的一种重要机制。对光学波段以上的较高频率连续谱，光电吸收远大于自由-自由吸收。

对于原子序数为 Z 的离子，若处在主量子数为 n 的能级上的原子数密度为 N_n ，则所有能级的类H离子所贡献的总的光电吸收系数为

$$\alpha_{bf}(\nu) = \sum_{n>n_0} N_n \sigma_{bf}(\nu, n)$$

其中求和是对所有电离能小于吸收光子能量 $h\nu$ 的量子态进行，即 $Z^2 I_H / n^2 \leq h\nu$ 。

在局部热平衡条件下， n 能级上的原子数密度 N_n 由Saha-Boltzmann方程给出：

$$N_n = N_e N_Z \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{g_n}{2} \exp\left(\frac{\chi_n}{kT}\right)$$

式中 $\chi_n = Z^2 I_H / n^2$ 是类H离子能级 n 的电离能， $g_n = 2n^2$ 是能级 n 的权重。

显然，低能级的粒子数通常远大于高能级， $N_1 \gg N_2 \gg N_3 \dots$

另外，由于 $\sigma_{bf}(\nu, n) \propto 1/n^5$ ，故 $\sigma_{bf,1} \gg \sigma_{bf,2} \gg \sigma_{bf,3} \dots$

所以，吸收系数 α_{bf} 对各能态的求和只需取有限的几项低能态即可。

由于天体中的元素种类有限，且丰度不同，所以**不同元素的束缚—自由吸收过程主导着不同波段的辐射（光子）的吸收**： $h\nu \gtrsim Z^2 I_H / n^2$ 。对于元素的最低能级 $n=1$ ，**吸收频率** $\propto Z^2$

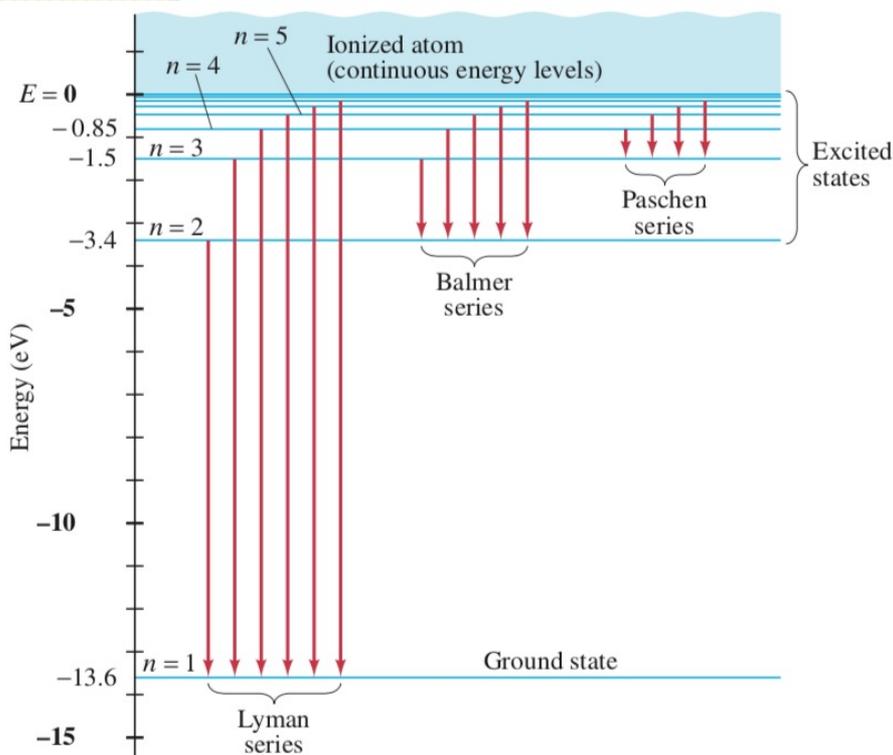
✧ 天体中的主要元素—**氢**原子来说，基态电离能13.6eV，如果氢气体温度不高，没有完全电离，**对光学紫外辐射的吸收很重要**⇒光致电离，但对高能光子（如X射线）的**束缚—自由吸收很少**， $\sigma_{bf} \propto \nu^{-3}$ 随频率快速减少

✧ 重元素，如**铁**（ $Z=26$ ），**对X射线的吸收非常重要**，因为内壳层电子的电离能非常高，只有高频辐射的光子才能使内壳层电子光致电离($h\nu \gtrsim Z^2 I_H / n^2$)，且吸收截面很大 $\sigma_{bf} \propto Z^4$ 。故虽然丰度不大，b-f吸收仍然很强

✧ 重元素也对光学紫外有光电吸收(使外壳层电子电离)，但由于在天体中丰度低，相对于氢来说对光学紫外的吸收很小

复合线(recombination line)

复合辐射不仅产生连续谱，自由电子在复合到离子的**激发态**后发生**向低能级的级联跃迁过程中产生发射谱线，称为复合线。**



氢原子能级图

- ◇ 向 $n=1$ 能级发生的级联跃迁过程产生氢的Lyman series (赖曼线系)
- ◇ 向 $n=2$ 能级发生的级联跃迁过程产生氢的Balmer series(巴尔末) 线系，它们在天体物理中非常重要。对温度在 $10^3 - 10^5\text{K}$ 范围的**低密度**等离子体， $H_\alpha(6563\text{\AA})$ 和 $H_\beta(4861\text{\AA})$ 线是光学谱中两条重要特征线（从理论上可以定出巴尔末线系的各谱线的相对强度并与观测比较）。我们主讲Balmer Series

对给定参数 T , N_e 及 $N(H^+)$, $n \geq 3$ 的各能级上的H原子数 N_n 可求。所以, 每条谱线的发射系数可用公式:

$$j(\nu_{nk}) = N_n A_{nk} h \nu_{nk}$$

$$\text{其中 } A_{nk} = \frac{g_k}{g_n} \frac{8\pi^2 e^2 \nu_{nk}^2}{m c^3} \bar{f}_{kn}, \quad \bar{f}_{kn} = \frac{64}{3\sqrt{3}\pi} \frac{1}{g_k} \frac{k^3 n^3}{(n^2 - k^2)^3} g_{nk}, \quad g_k = 2k^2, \quad g_{nk} \approx 1$$

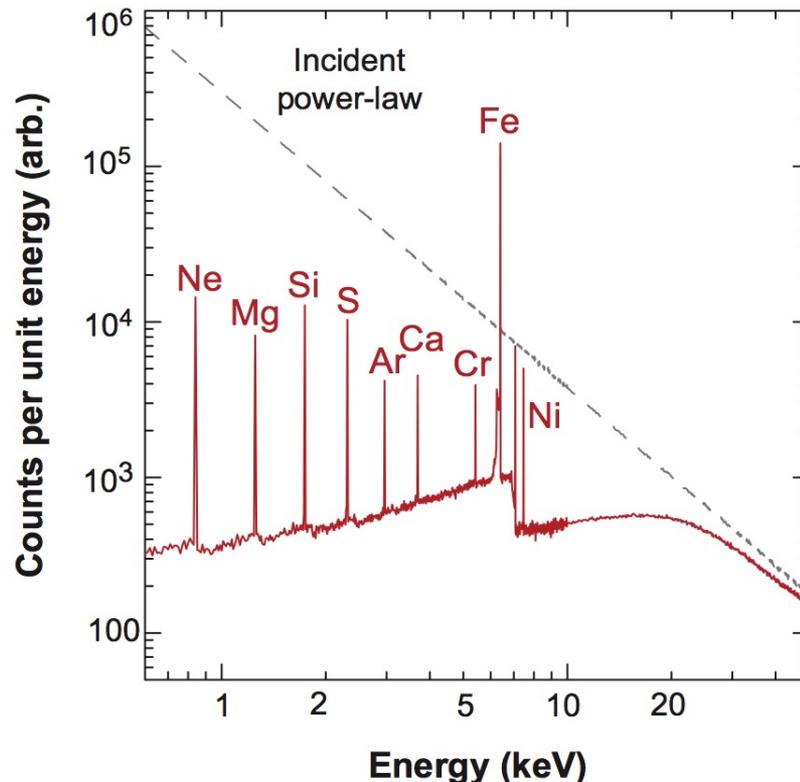
$$N_n = b_n N_e N(H^+) \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{g_n}{2} \exp\left(\frac{I_H}{n^2 k T}\right)$$

b_n 可从下面的复合级联方程求出

$$N_e N(H^+) \alpha_n(T) + \sum_{k=n+1}^{\infty} N_k A_{kn} = N_n \sum_{k=2}^{n-1} A_{nk}, \quad n \geq 2$$

X射线波段的荧光铁K α 线 (Fluorescence iron K α line)

硬X射线照射温度为 10^4 - 10^5 K的吸积盘，产生能量为6.40-6.97keV的荧光发射线--铁K α 线。



The reflection of an incident power-law X-ray spectrum by a cold and semi-infinite slab of gas with cosmic abundances (Results of Monte Carlo simulation)

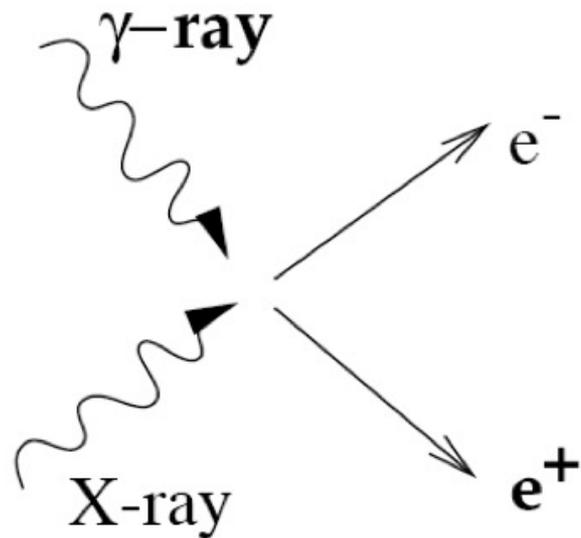
注：真实的活动星系核的辐射谱除了上面的反射成分外，还有直接逃逸的成分 \approx 虚线部分，二者的叠加才是真正的辐射谱

6、正负电子对的产生与湮灭

当高能光子的密度达到一定值时，高能光子之间的相互作用可以产生正负电子对。正负电子对可能湮灭产生高能辐射。正负电子对的产生和湮灭改变原来的谱形。

在非常致密的高能辐射中需要考虑的过程。

应用天体：
pulsars, jets from AGN
and gamma-ray bursts.



三. 相关的等离子体效应

这里的等离子体指发射和吸收都不重要的冷等离子体

- ✧ 无磁场、各向同性冷等离子体中的色散关系在脉冲总的应用
- ✧ 光线在有外部磁场（各向异性等离子体）的等离子体中的传播效应：Faraday rotation (法拉第旋转)

冷等离子体的色散关系、截止频率

无磁场冷等离子体的色散关系

$$c^2 k^2 = \varepsilon \omega^2 \quad \varepsilon = 1 - \frac{4\pi n e^2}{\omega^2 m} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2$$

$$\text{截止频率} \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$$

$\omega < \omega_p$ 的电磁波无法再冷等离子体中传播，被反射。

电磁波的相速度

$$v_{ph} \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

群速度

$$v_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

相速度、群速度都是频率的函数。

冷等离子体色散在脉冲星中的应用

- 来自脉冲星的每一个辐射脉冲都覆盖较宽的频率范围
- 辐射脉冲穿过星际等离子体达到地球时，由于等离子体的折射（依赖于频率→色散），不同频率的光传播的速度一群速有所不同，因此同一时刻发出的脉冲由于频率不一样达到地球的时间会稍有不同。
- 假设脉冲星到地球表面的距离为 d ，频率为 ω 的辐射脉冲到达地球的时间为

$$t_p = \int_0^d \frac{ds}{v_g}$$

这里等离子体的密度随距离 s 变化

ds 是沿观测方向的微分距离，由于星际等离子体的非均匀性，上述积分描述辐射脉冲的传播时间

星际等离子体的截止频率通常很低， $\sim 10^3 \text{Hz}$ ，因此可以假设 $\omega \gg \omega_p$ ，展开 $1/v_g$ ，

$$v_g^{-1} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} = (5.63 \times 10^4 n^{1/2} \text{s}^{-1})^2$$

$$\longrightarrow t_p = \int_0^d \frac{ds}{v_g} \approx \frac{d}{c} + \frac{1}{2c\omega^2} \int_0^d \omega_p^2 ds = \frac{d}{c} + \frac{2\pi e^2}{mc\omega^2} \int_0^d n ds$$

第一项是辐射脉冲在真空中的传播时间，第二项是由于等离子体的存在带来的修正项。

由于测量中很容易测量到不同频率到达的时间延迟， $dt_p/d\omega$ ，上式对 ω 微分得到

$$\frac{dt_p}{d\omega} = -\frac{4\pi e^2}{mc\omega^3} \int_0^d n ds \quad DM \equiv \int_0^d n ds$$

积分项即柱密度，可从测量 $dt_p/d\omega$ 得到。因此，可以求得柱密度利用典型的星际介质的电子数密度值 ($n \sim 0.03 \text{ cm}^{-3}$)，还可求得脉冲星的距离。

光在大尺度磁场的冷等离子体中的传播： 法拉第旋转 (Faraday rotation)

线偏振的电磁波在有磁场的等离子体中传播时发生的偏振面旋转现象叫做**法拉第旋转**(Faraday rotation)。起源：

- ✧ 线偏振波：分解成由两个同频率、等振幅的左旋和右旋圆偏振波的线性叠加
- ✧ 左旋和右旋圆偏振波在有固定磁场的等离子体中的相速度是不一样的

$$c^2 k^2 = \epsilon \omega^2$$

$$\epsilon_{R,L} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B)}$$

$$v_{ph} = \omega / k = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{R,L}}}$$

→ 偏振面旋转

偏振面：偏振方向与传播方向构成的平面

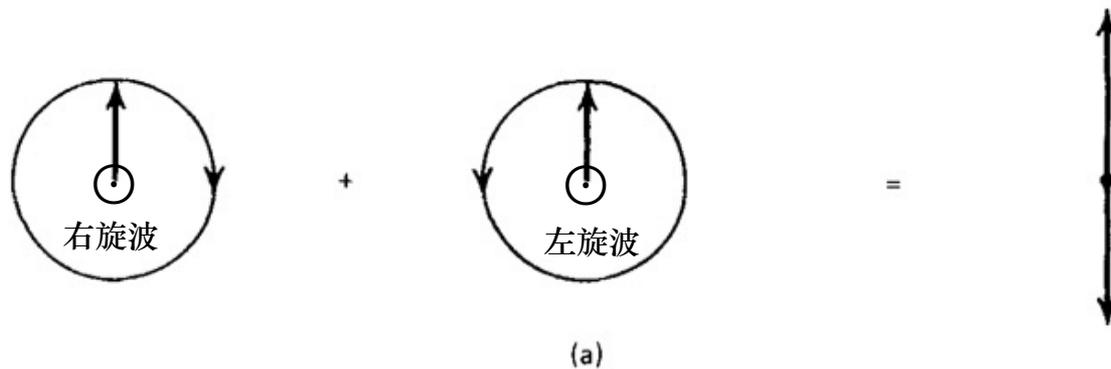


Figure 8.1a Decomposition of linear polarization into components of right and left circular polarization.

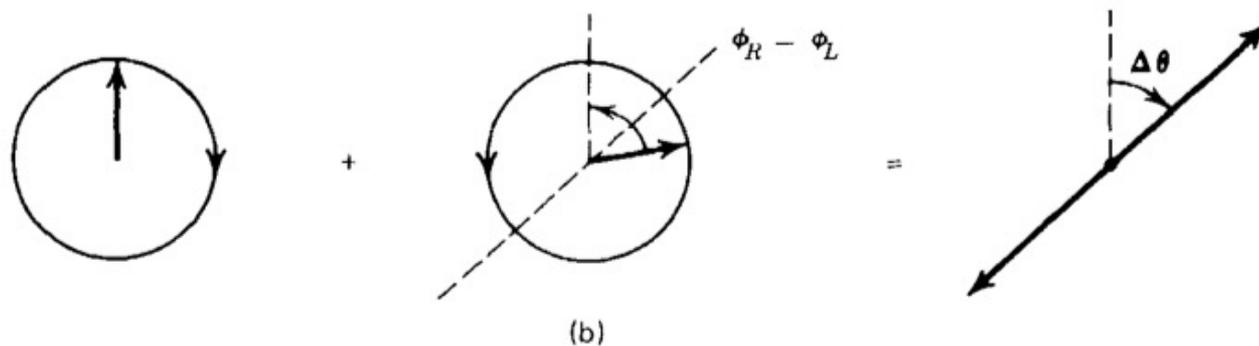


Figure 8.1b Faraday rotation of the plane of polarization.

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \int_0^d (k_R - k_L) ds = \frac{1}{2} \int_0^d (c\omega^2)^{-1} \omega_p^2 \omega_B ds$$

已知 $\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$, $\omega_B = \frac{e B_0}{m c}$ 代入 $\Delta\theta = \frac{1}{2} \int_0^d (c\omega^2)^{-1} \omega_p^2 \omega_B ds$

得到沿磁场方向传播的线偏振波的旋转角 $\Delta\theta = \frac{2\pi e^3}{m^2 c^2 \omega^2} \int_0^d n B_0 ds$

线偏振波在有固定磁场的等离子体中沿任意方向传播所产生的偏振面旋转角为

$$\Delta\theta = \frac{2\pi e^3}{m^2 c^2 \omega^2} \int_0^d n B_{\parallel} ds$$

这里 B_{\parallel} 是磁场在光线传播方向的分量。可见偏振面旋转角和等离子体电子密度 n , 磁场 B 在传播方向的投影、传播距离 d 成正比, 且与偏振波波长 λ 的平方成正比($\Delta\theta$ -- λ 关系: 旋光色散)

对于同一观测方向, 由于偏振旋转度与波的频率有关, 可以通过测量不同频率的偏振旋转角的差或微分, 确定上式中的积分项, 从而通过电子密度和距离等信息, “窥视” 星际介质的磁场性质。

应用条件: 线偏振波穿过有固定磁场的冷等离子体, $\omega \gg \omega_B, \omega \gg \omega_p$

冷等离子体效应对beaming效应的抑制

- 真空中：高速带电粒子的辐射具有beaming效应，归根于推迟势中的分母含有因子 $k=1-\beta\cos\theta$ ，

辐射锥角为： $\theta_b \sim 1/\gamma = (1-\beta^2)^{1/2}$

- 等离子体中：相应的因子为 $k=1-\beta n_r \cos\theta$

当 $n_r < 1$ ， k 值不会趋近于0，

辐射锥角为： $\theta_b \sim 1/\gamma_{\text{plasma}} = (1-n_r^2\beta^2)^{1/2}$

在 $n_r < 1$ 时比真空中的辐射锥大，beaming效应变弱

折射率依赖于辐射频率 $n_r \equiv \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

低频段, n_r 偏离1; 高频端, $n_r \rightarrow 1 \Rightarrow$

$$\theta_b \approx \frac{1}{\gamma_{plasma}} = (1 - \beta^2 n_r^2)^{1/2} \approx (1 - n_r^2)^{1/2} = \frac{\omega_p}{\omega}$$

- ✧ 在低频辐射端, θ_b 不是小值, beaming效应受到抑制
- ✧ 随着频率增加, θ_b 逐渐减小
- ✧ 在高频端, 当 $\omega \gg \gamma\omega_p$ 时, 可以达到真空中的值

对同步辐射有显著影响: 具有强beaming效应的同步辐射在低频端 $\omega < \gamma\omega_p$ 的beaming效应受到抑制, 能谱被截断, 临界频率 $\gamma\omega_p$ 比普通等离子体的截断频率 ω_p 要高得多。这种效应叫Razin Effect

四、辐射机制在高能天体物理中的应用

简单举例

详见各位老师的报告

Spectrum from standard accretion disk 标准吸积盘的多色黑体谱

Shakura & Sunyaev 1973

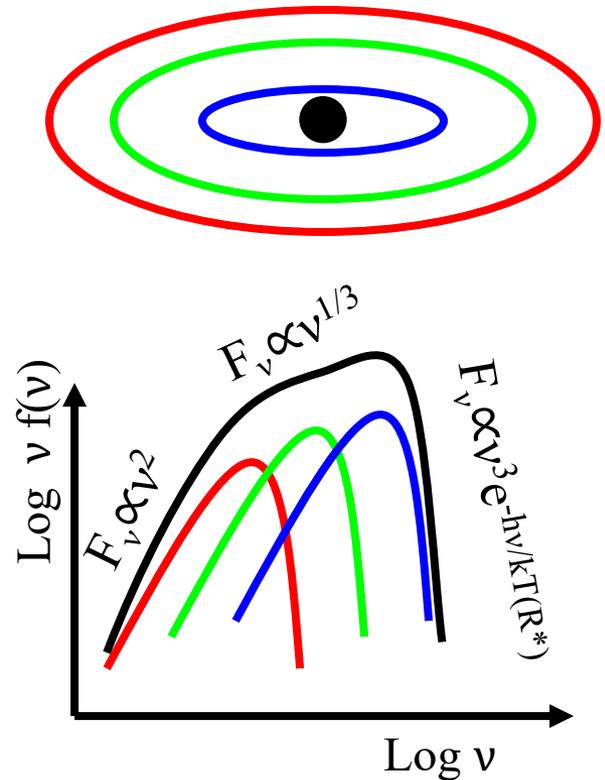
轴对称的吸积盘的温度从里到外递减，处处光学厚，表面有效温度 $T \propto R^{-3/4}$ ，其光谱由不同区域、不同温度的黑体谱的叠加，形成多色黑体谱

吸积盘的温度依赖于中心天体的质量：

$kT \sim 1 \text{ keV}$ (BH binaries)

$kT \sim 10 \text{ eV}$ (AGN)

因此多色黑体谱的辐射频段不同，但谱形一样



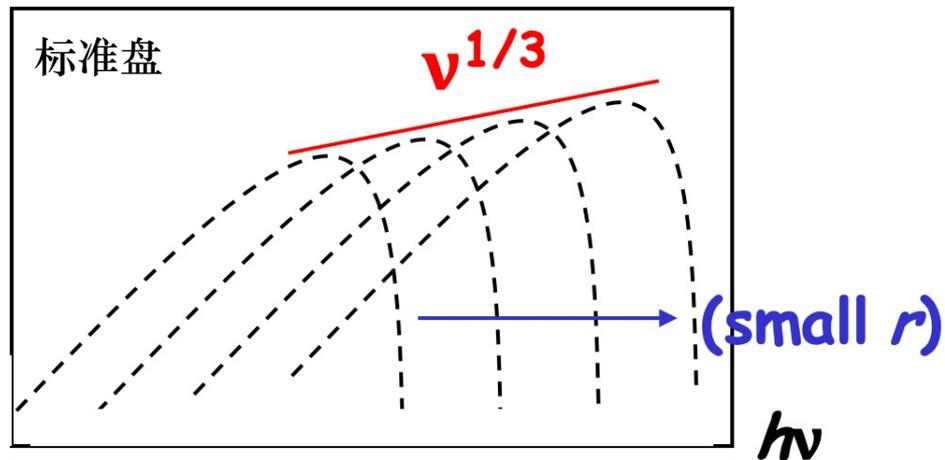
Slim disk 的辐射光谱以及与标准盘的比较

✧ 标准盘

$$T \propto R^{-3/4}$$

$$F_{\nu}(R) \propto \nu^{1/3}$$

F_{ν}

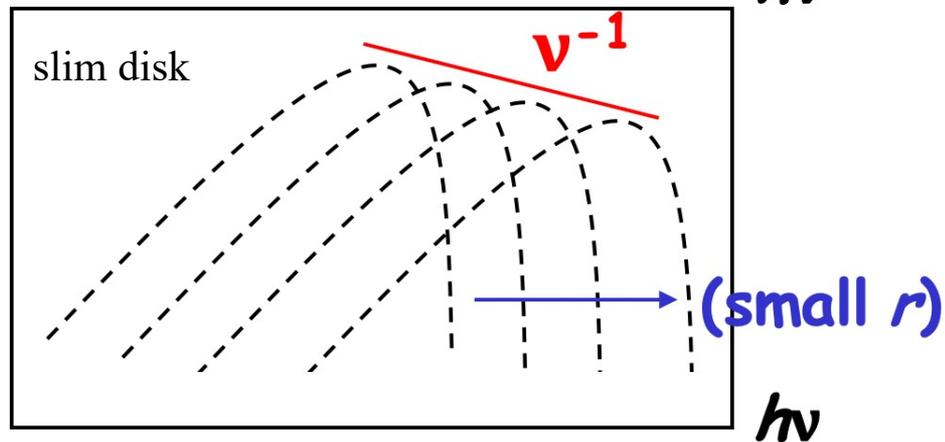


✧ Slim disk

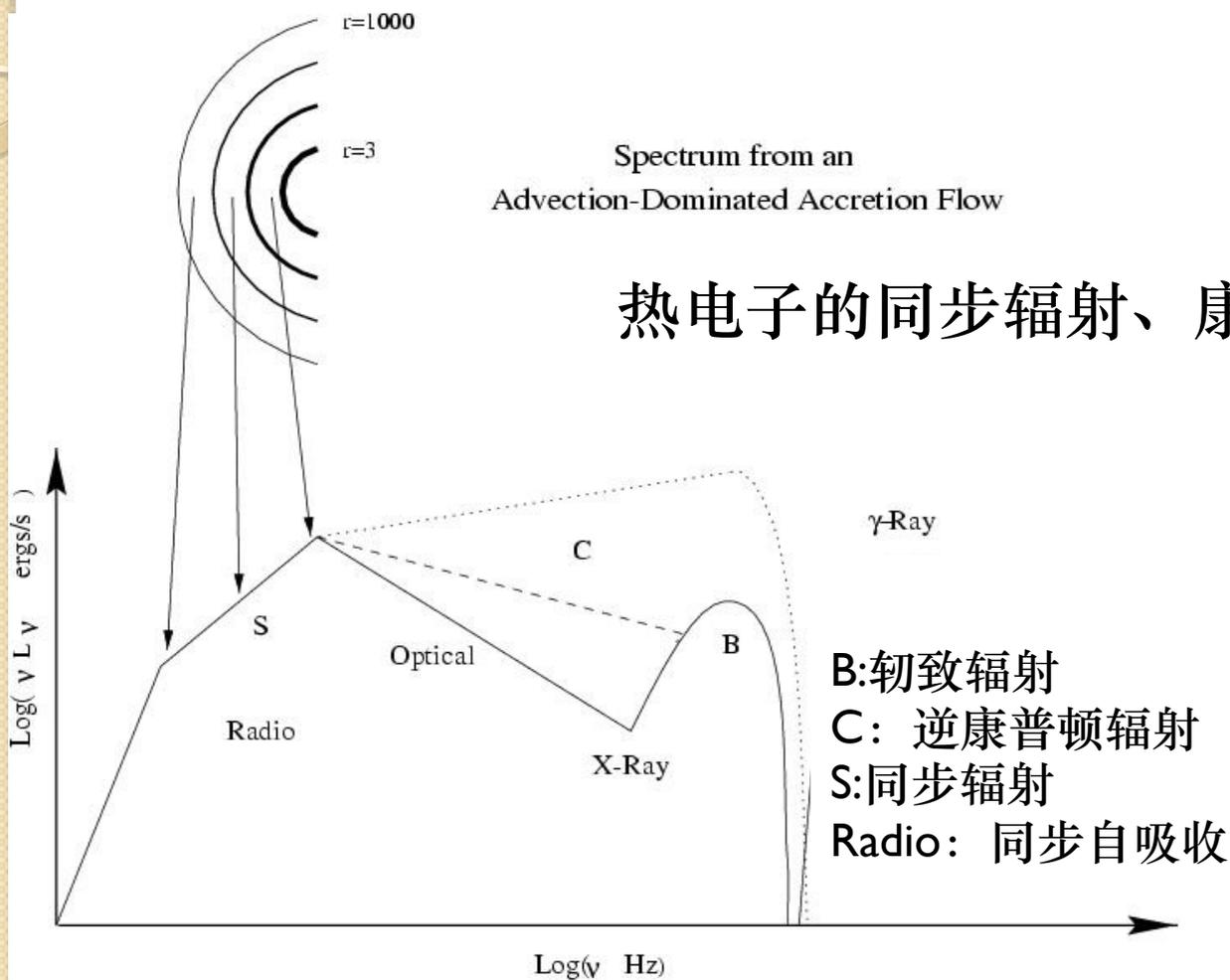
$$T \propto R^{-1/2}$$

$$F_{\nu}(R) \propto \nu^{-1}$$

F_{ν}



黑洞的几何厚光学薄热吸积流产生的辐射

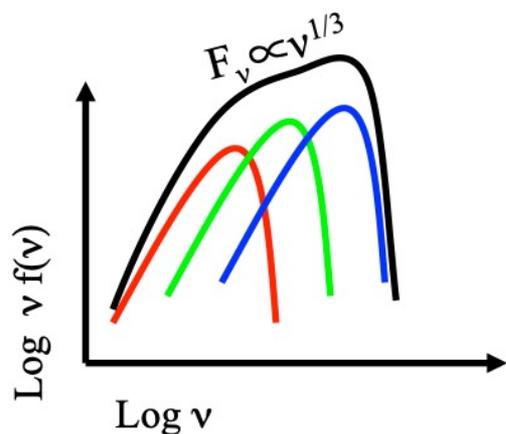


热电子的同步辐射、康普顿硬化。。

Narayan et al. 1998

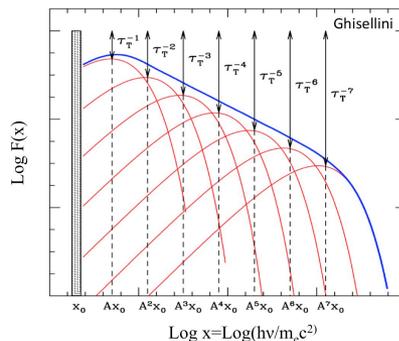
吸积盘与冕共存的辐射过程与光谱

吸积盘的多色黑体谱在光学薄的高温气体中的逆康普顿散射谱

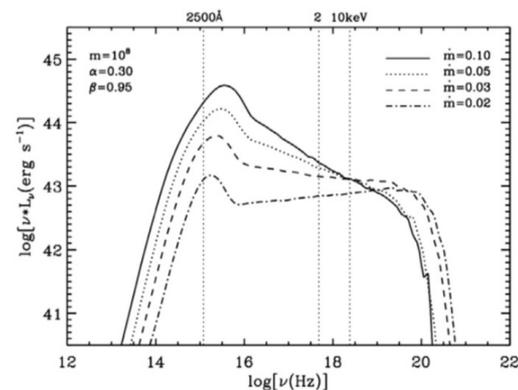
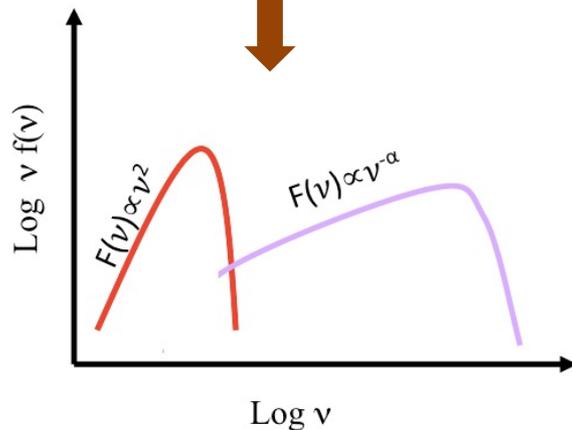


多色黑体谱

+

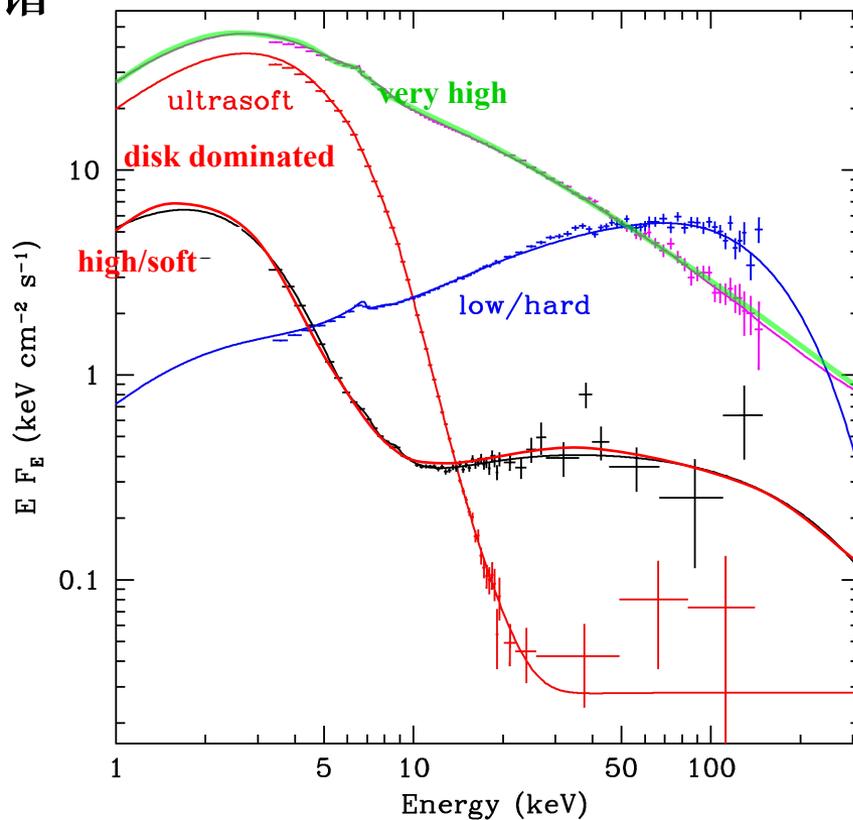
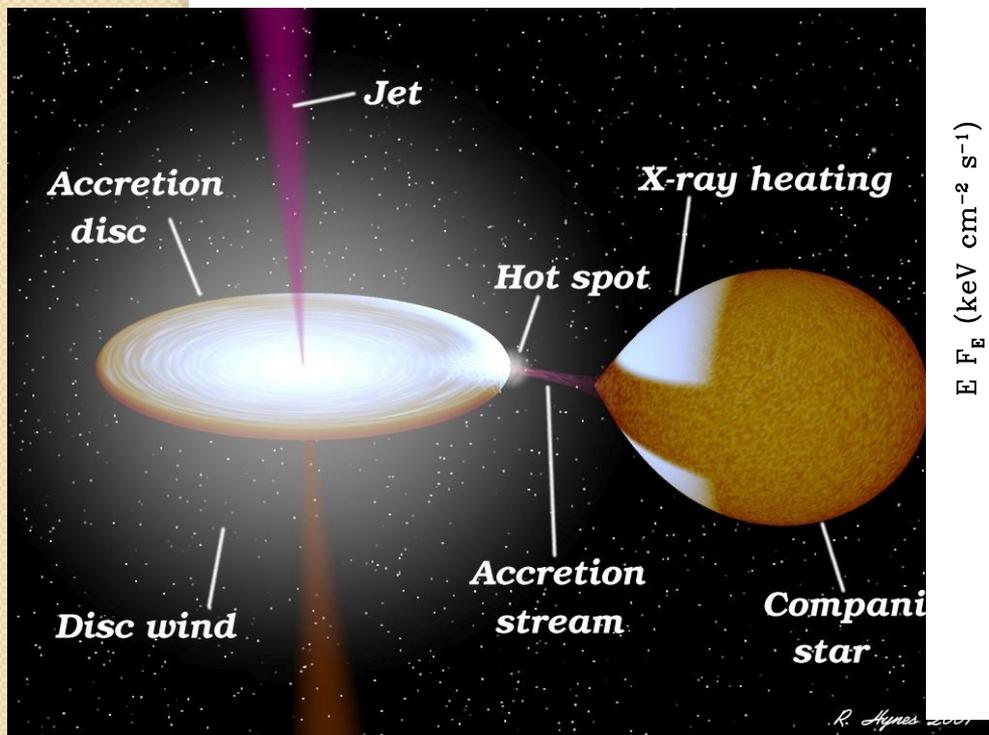


盘光子在冕中的逆康普顿散射



黑洞X射线双星的辐射谱

- 多色黑体谱
- 多色黑体谱+逆康普顿散射谱
- 同步自康普顿谱+韧致辐射谱



典型的活动星系核的辐射谱

- 1)、尘埃环
- 2)、吸积盘
- 3)、吸积盘辐射经冕气体逆康普顿散射后的光谱

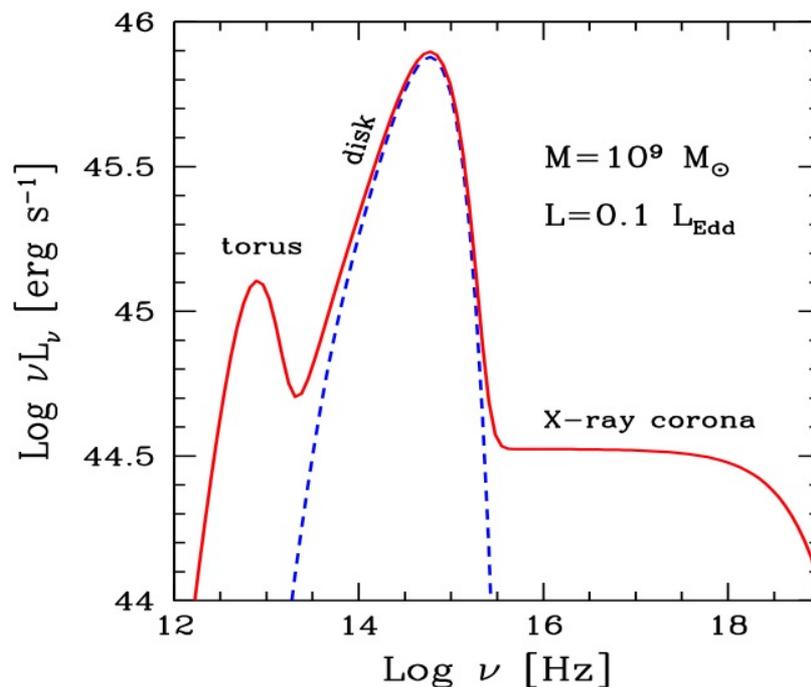
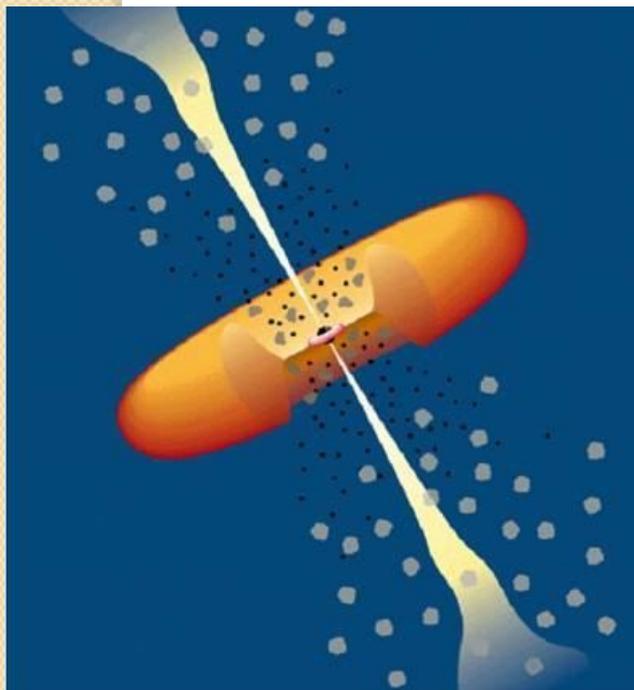


Figure 8.2: Spectrum from a standard accretion disk, the infrared torus and the X-ray emitting corona.

平谱射电类星体的合成射电谱

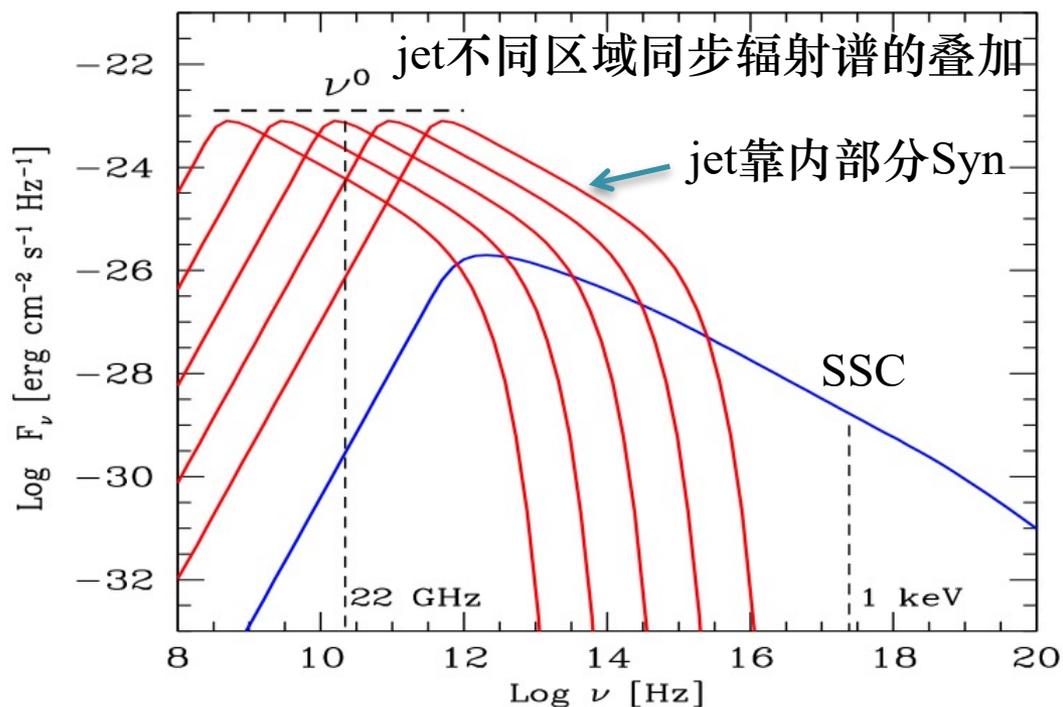


Figure 6.2: Typical example of the composite spectrum of a flat spectrum quasars (FSRQ) shown in the F_ν vs ν representation, to better see the flat spectrum in the radio. The reason of the flat spectrum is that different parts of the jet contributes at different frequencies, but in a coherent way. The blue line is the SSC spectrum. Suppose to observe, with the VLBI, at 22 GHz: in this framework we will always observe the jet component peaking at this frequency. So you automatically observe at the self-absorption frequency of that component (for which you measure the angular size).

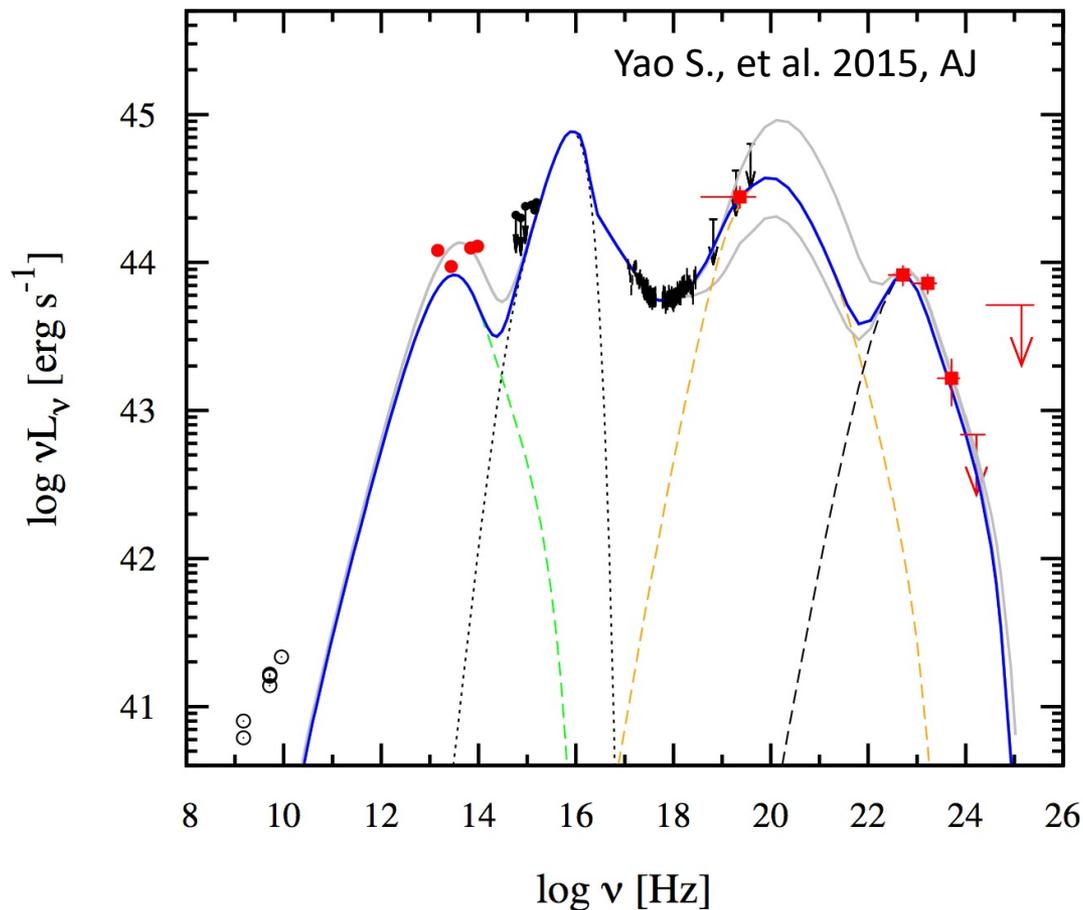
Ghisellini

平谱类星体的射电辐射来源于喷流各部分的同步辐射的叠加, 喷流不同位置 γ 值不同, 尺度也不同, 各部分的辐射叠加形成左图的射电辐射谱, 谱指数 ≈ 0 .

蓝线为同步自康普顿谱

射电噪NLS1的辐射谱：多种可能的辐射机制

Radio-IR is produced by Syn in jet, opt/uv by disk, X-ray (black) by corona inverse Compton, X-ray (red) by jet through SSC, Gamma from jet by External Compton.



活动星系核 1H 0324+34
Red from jet, black from
disk corona (Yao Su)